

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**Departamento de Óptica**



**TESIS DOCTORAL**

**Fototurbulencia:  
un estudio experimental de las inestabilidades espacio-  
temporales en láseres de colorantes y CO(2)**

TESIS DOCTORAL

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

**Ignacio Pastor Díaz**

Director:

**José Manuel Guerra Pérez**

**Madrid, 2002**

**ISBN: 978-84-669-0449-0**

© Ignacio Pastor Díaz, 1994

DEPARTAMENTO DE OPTICA  
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID



**FOTOTURBULENCIA: UN ESTUDIO  
EXPERIMENTAL DE LAS  
INESTABILIDADES ESPACIO-  
TEMPORALES EN LASERES DE  
COLORANTES Y CO<sub>2</sub>**

MEMORIA PARA ASPIRAR AL GRADO DE DOCTOR EN  
CIENCIAS FISICAS PRESENTADA POR:

**D. IGNACIO PASTOR DIAZ**

DIRECTOR:

DR. D. JOSE MANUEL GUERRA PEREZ

Otoño de 1994

A mis padres y hermano, a mi esposa e hijos, con amor.

# AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas e instituciones que me han ayudado para que este trabajo haya podido concluirse. Es el momento, pues, de reconocer con agradecimiento y cariño todos los apoyos, morales y materiales, que me han permitido indagar, aunque sólo sea someramente, en el complejo mundo que nos rodea.

A mi director de tesis, el Dr. D. José Manuel Guerra Pérez, he de agradecerle su extraordinario optimismo científico, que ha servido para allanar muchas dificultades cuando parecían insoslayables, la profundidad de sus conocimientos e intereses, no sólo científicos, que gustosamente ha compartido conmigo, y su permanente disposición al diálogo y a la confrontación de opiniones para esclarecer los problemas a los que nos enfrentábamos.

Quisiera agradecer también al Dr. D. Eusebio Bernabéu Martínez, Catedrático y Director del Departamento de Optica, la ocasión brindada para trabajar en el mismo, y aprovechar los recursos técnicos de los que dispone. Otras instituciones que aportaron en su momento material e instrumentación para continuar los experimentos fueron ENOSA y el Taller de Precisión del Ejército, a quienes muestro aquí mi agradecimiento.

Durante los años en que se gestaron los resultados presentados en esta memoria pude disfrutar de la compañía de numerosos colegas y amigos de quienes aprendí mucho como científicos y como personas. En particular la amistad que me une con las doctoras Margarita Sánchez Balmaseda, Rosa Weigand Talavera y con el doctor Fernando Encinas Sanz es uno de los mejores regalos y de los más gratos recuerdos de esos años de investigación.

Con Fernando Encinas he colaborado estrechamente en las medidas de la dinámica espacio-temporal del láser de  $\text{CO}_2$ , al que ninguno suponíamos un comportamiento tan complicado y fascinante. También con él y con Víctor Pérez García hemos abierto una pequeña brecha en la comprensión teórica de los fenómenos que observamos en el experimento. Esta colaboración, que tan fructífera se ha mostrado hasta ahora, se proyecta hacia el futuro en forma de una línea de investigación en la que se estudiarán los patrones espacio-temporales de un láser de  $\text{CO}_2$  de alto número de Fresnel funcionando en onda continua.

Una parte sustancial del trabajo numérico descrito en esta memoria se ha llevado a cabo en el CIEMAT, al que pertenezco desde 1990. Quisiera agradecer a mis compañeros de la División de Fusión su acogida y su ayuda a la hora de manejar nuevos equipos informáticos con los que no tenía experiencia previa.



Mi esposa Emilia, mi hijo Ignacio y el que nacerá si Dios quiere al poco de concluir esta memoria son fuente de alegría y consuelo cuando las dificultades arrecian. A ellos se debe en gran medida el haber perseverado para finalizar el trabajo que ahora presentamos.

Toda esta labor de largos años sería inconcebible sin el apoyo y el cariño incondicionales manifestados hacia mí por mis padres, Eulogia e Ignacio, y mi hermano David. Su aliento es constante, y si este trabajo ha cristalizado se debe también a que mis padres antepusieron siempre nuestra formación a cualquier otra consideración o interés. Por todo ello, gracias.

# A MODO DE INTRODUCCION

En la presente memoria se describen experimentos y modelos numéricos con los que se estudia la dinámica espacio-temporal no lineal de láseres de colorantes y  $\text{CO}_2$ .

El capítulo 1 resume los elementos teóricos esenciales de la nueva ciencia de los sistemas dinámicos no lineales, haciendo especial énfasis en el comportamiento caótico determinista propio de muchos de ellos. Estos resultados se particularizan al modelo más simple de la dinámica láser (modelo de Lorenz-Haken) y que es capaz de predecir la existencia de una transición orden-caos en un láser monomodo homogéneamente ensanchado. Se describen además los principales resultados experimentales que han influido en nuestro trabajo y que apuntan a la existencia de una dinámica espacio-temporal muy compleja en los sistemas láser.

Los capítulos 2 y 3 contienen el grueso de los resultados experimentales y presentan una estructura muy similar; esto se debe a que los experimentos en el láser de  $\text{CO}_2$  estuvieron profundamente influidos por lo que ya sabíamos del láser de colorantes, aunque cada uno de ellos presenta rasgos particulares en su dinámica que los hacen diferentes.

El principal resultado experimental es que en ambos casos la sección recta del haz del láser presenta una dinámica temporal caótica acompañada de una descorrelación espacial para distancias muy pequeñas comparadas con el tamaño de dicha sección. La primera identificación de este fenómeno en láseres de colorantes (al menos según los conocimientos del autor) se dió en [Ipa88].

En algún caso ha sido posible identificar la cadena de bifurcaciones que lleva desde el estado ordenado (tanto en el tiempo como en el espacio) hasta el caótico o turbulento, y se han aplicado las técnicas de la dinámica no lineal para estimar la dimensión fractal del atractor subyacente. En muchos de los casos estudiados esta dimensión resulta ser pequeña (entre 2.7 y 4.0 típicamente). Así pues la dinámica temporal compleja observada procede de un sistema caótico determinista con un número pequeño de grados de libertad.

En el capítulo 4 desarrollamos modelos teóricos derivados de las ecuaciones de Maxwell-Bloch con los que intentamos explicar algunas observaciones experimentales. Se analizan con detalle las soluciones exactas a dichas ecuaciones en forma de ondas planas no lineales. Se ha clarificado la relación entre la dinámica del campo eléctrico y la energía en dicho modelo, y se han calculados los patrones espaciales de energía a que da lugar. Un resultado interesante es que la dimensión

fractal calculada y la medida en el caso del láser de  $\text{CO}_2$  coinciden razonablemente bien.

Otros modelos que permiten entender algunas características del láser de colorantes están basados en la idea de la existencia de filamentos en la sección recta del haz cuya interacción mutua daría lugar a la dinámica observada. Una primera aproximación muy simple a este fenómeno consiste en estudiar el acoplo de dos osciladores de tipo van der Pol. Los cálculos muestran que este modelo presenta una rica dinámica, que incluye sincronización de oscilaciones, caos, multiestabilidad y existencia de cuencas de atracción fractales. De especial interés para nuestro caso es el hecho de que osciladores que inicialmente tienen frecuencias muy dispares puedan sincronizarse aproximadamente incluso cuando la dinámica es caótica (esto quiere decir que el espectro de potencia presenta picos bien marcados sobre un fondo continuo), y que dichas frecuencias dependan en algunos casos muy débilmente de los parámetros de control.

En la sección de conclusiones se describen en forma pormenorizada los hallazgos experimentales o numéricos más relevantes y novedosos a que a dado lugar este trabajo.

# INDICE

## Páginas

### A MODO DE INTRODUCCION

V

### CAPITULO 1. PERSPECTIVAS DE LA FISICA NO LINEAL DE LOS SISTEMAS LASER

1.1. La renovación de la dinámica	1
1.2. El modelo de Lorenz-Haken y sus generalizaciones como paradigma teórico-experimental del caos temporal en láseres	24
1.3. Fenomenología temporal compleja en láseres modulados externamente, inhomogéneamente ensanchados o multimodo	34
1.3.1. Inestabilidades y caos en láseres de gas	35
1.3.2. Inestabilidades y caos en láseres de colorantes	38
1.3.3. Inestabilidades y caos en láseres de estado sólido	42
1.4. Efectos transversales en la dinámica láser, caos espaciotemporal y turbulencia óptica	43

### CAPITULO 2. ASPECTOS EXPERIMENTALES DE LAS FLUCTUACIONES ESPACIO-TEMPORALES DE INTENSIDAD EN EL LASER DE COLORANTES

2.1. Descripción del sistema experimental	49
2.2. Parámetros de control del láser de colorantes	50
2.3. Tratamiento numérico de los datos procedentes del láser de colorantes	52
2.3.1. Algoritmo de interpolación y separación de las fluctuaciones de la señal experimental	52
2.3.2. Análisis de Fourier	54
2.3.3. El algoritmo de Grassberger-Procaccia	54
2.3.4. Técnica de reconstrucción del atractor	57
2.4. Dinámica espacio-temporal del láser de colorantes	59

### **CAPITULO 3. ASPECTOS EXPERIMENTALES DE LAS FLUCTUACIONES ESPACIO-TEMPORALES DE INTENSIDAD EN EL LASER DE CO<sub>2</sub>**

3.1. Descripción del sistema experimental	69
3.2. Parámetros de control del láser de CO <sub>2</sub>	71
3.3. Estructura axial-transversal de los modos del resonador. Particularización al láser de CO <sub>2</sub>	75
3.4. Dinámica del láser de CO <sub>2</sub> en el pico de conmutación de ganancia (PCG)	78
3.4. Dinámica del láser de CO <sub>2</sub> en la cola de transferencia colisional (CTC)	89

### **CAPITULO 4. DINAMICA ESPACIO-TEMPORAL DE LOS LASERES EN LA APROXIMACION SEMICLASICA**

4.1. Aproximaciones teóricas a la física del láser	98
--	----

4.2. Deducción de las ecuaciones de Maxwell-Bloch	100
4.3. Soluciones exactas de las ecuaciones de MB en forma de ondas planas no lineales. Orden y caos temporal en dichas soluciones al variar un pará- metro de control y comparación con el experimen- to	113
4.4. Patrones espaciales de las soluciones en forma de ondas planas y bifurcaciones espacio-temporales	139
4.5. Interacción de dominios emisores. Aplicación a la dinámica del láser	141
<b>CONCLUSIONES</b>	145
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	150

# **CAPITULO 1**

## **PERSPECTIVAS DE LA FISICA NO LINEAL DE LOS SISTEMAS LASER**

### **1.1. La renovación de la dinámica**

En este epígrafe pretendemos introducir la mayor parte de los conceptos y terminología que serán necesarios para describir los resultados presentados en el resto de la memoria. Aparte de esto haremos también una serie de comentarios acerca de cómo han cambiado nuestras nociones sobre el comportamiento de los sistemas no lineales al descubrirse los fenómenos de inestabilidad dinámica determinista, bifurcaciones y caos. Pensamos que una concepción clara de estos cambios es necesaria incluso para plantearse las preguntas correctas sobre la dinámica de tales sistemas, y en este sentido estamos asistiendo a la creación de un nuevo paradigma científico. Paradigma que implica ver fenómenos ya conocidos y otros nuevos bajo una perspectiva más amplia y unificadora, objetivos ambos dentro de la mejor tradición de las ciencias naturales. Sin embargo no es nuestro objetivo aquí describir teorías científicas revolucionarias en el sentido de hallar nuevas leyes fundamentales de la naturaleza sino, más bien, resaltar todo aquello que aún queda de sorprendente y novedoso en las teorías clásicas, que describen de una manera adecuada gran parte de los sistemas físicos que nos rodean.

Para comenzar vamos a fijarnos en dos fenómenos que atrajeron gran cantidad de interés durante los siglos XVIII y XIX: la dinámica de tres o más cuerpos sometidos a su influencia gravitatoria mutua y el comportamiento de los fluidos, en especial con respecto al movimiento turbulento que manifiestan en una gran variedad de situaciones experimentales.

Se puede decir que el problema de los tres cuerpos es tan antiguo como la formulación por Newton de sus leyes de movimiento y de atracción universal. Tras un primer e impresionante éxito al deducir las características más relevantes del movimiento de los cuerpos en el sistema solar a partir de unas pocas leyes matemáticas extremadamente sencillas surgió la cuestión de cómo se comportarían tres cuerpos sometidos a sus atracciones gravitatorias mutuas. Es bien sabido que las propiedades más fácilmente observables de los movimientos planetarios (sus órbitas

elípticas, la conservación de la velocidad areolar y la relación entre periodo de revolución y semieje mayor de la órbita) se deducen suponiendo que tenemos únicamente dos cuerpos, el Sol y el planeta en cuestión. Desde el primer momento se vió que la presencia de los otros planetas introduciría ciertas correcciones a estos movimientos keplerianos que habían de ser tomadas en cuenta si se querían obtener predicciones realmente afinadas del comportamiento de los planetas y satélites del sistema solar. Las correcciones vienen dadas en términos de unos parámetros adimensionales que son esencialmente los cocientes de las masas de los distintos planetas a la del Sol, y por tanto son números pequeños. En este caso la teoría de perturbaciones (desarrollada *ex-profeso* para responder a las exigencias de la mecánica celeste, no lo olvidemos) permite unas predicciones realmente buenas de los movimientos planetarios, tanto es así que las desviaciones de los comportamientos predichos permitieron establecer teóricamente la existencia del octavo planeta del sistema solar (Neptuno) antes de su descubrimiento por los astrónomos. El descubrir un planeta hasta entonces desconocido justamente en la posición predicha por el cálculo aumentó la confianza de los físicos y astrónomos en la corrección del modelo newtoniano, al menos en cuanto a su aplicación a nuestro sistema planetario se refiere. Así pues, si los planetas obedecen las leyes mecánicas establecidas, las desviaciones de sus trayectorias keplerianas son predichas por la teoría de perturbaciones, y cuando aún quedan irregularidades que explicar se predice la existencia de un nuevo planeta y éste realmente existe ¿cuál es el problema? ¿No se ha llegado al máximo exigible en ciencias naturales al menos en este dominio del conocimiento? No del todo. En primer lugar parecía casi insultante el que la generalización más simple del movimiento de dos cuerpos sometidos a su atracción gravitatoria, es decir el de tres cuerpos, siguiera sin solución analítica. Este problema teórico ocupó a las mejores mentes matemáticas de los siglos XVIII y XIX, contando entre los que se dedicaron al mismo Newton, Clairaut, Euler, Laplace, Lagrange, Poincaré, etc. ¿Qué es lo que hace tan difícil este problema? ¿Es simplemente cuestión de encontrar algún "truco matemático" suficientemente ingenioso que permita resolverlo, o hay algo más profundo detrás de las inmensas dificultades que presenta?

En segundo, hay un caso del problema de los tres cuerpos que en su día fue de una importancia práctica relativamente grande, por lo que la solución del mismo era más urgente si cabe: nos referimos al sistema Sol-Tierra-Luna. Debido a la proximidad entre nuestro planeta y su satélite, y a su relación de masas relativamente grande, la teoría de perturbaciones es mucho más difícil de aplicar que en otros casos, así que también los éxitos predictivos eran menores. La importancia práctica de este problema radicaba en que en una época en que los relojes de precisión eran aún difíciles de fabricar, la orientación con respecto a la Luna era una de las pocas maneras fiables de obtener la longitud en alta mar, con lo que esto suponía en una época de expansión



del comercio transatlántico, y de viajes de descubrimiento y exploración a lo largo de todo el globo.

Tras casi dos siglos de análisis del problema de los tres cuerpos podemos decir que a finales del siglo XIX , y gracias sobre todo a la monumental obra de Poincaré, se habían entendido parte de las razones de las dificultades del mismo. Se resumen como sigue: el movimiento de  $N$  cuerpos puntuales sometidos únicamente a su mutua atracción gravitatoria se puede interpretar como el movimiento de un único punto representativo de todo el sistema mecánico en un espacio abstracto de  $6N$  dimensiones (no estamos considerando la posibilidad de que existan ligaduras que limiten el número de grados de libertad) llamado espacio de fases del sistema. Dado que la energía total se conserva, el movimiento en este espacio  $6N$ -dimensional está constreñido por el hecho de que una cierta función de esas  $6N$  coordenadas es constante. Desde un punto de vista geométrico esto significa que el movimiento está limitado a la hipersuperficie

$$\xi(x_1, \dots, x_{3N}, p_1, \dots, p_{3N}) = E = \text{Cte.} \quad (1.1)$$

Cada constante del movimiento adicional supone que la evolución temporal del sistema mecánico se restringe a variedades geométricas de dimensiones cada vez menores. En mecánica se conocen las leyes de conservación generales del momento angular y de la cantidad de movimiento del centro de masas en sistemas aislados. Así pues tendremos en general siete constantes del movimiento (las tres componentes del momento angular, las tres del momento lineal total y la energía). La cuestión es que en el caso del movimiento de dos cuerpos la existencia de estas cantidades conservadas permite la resolución analítica exacta del problema, debido por una parte a que el sistema tiene muy pocos grados de libertad y por otra a que las constantes del movimiento restringen severamente los tipos de evoluciones posibles. Sin embargo, al añadir otro cuerpo más se incrementa la dimensión del espacio de fases sin que por ello se incremente (en general) el número de cantidades conservadas. De esto se deduce que el punto representativo del sistema mecánico en el espacio de fases dispone, en principio, de una mayor libertad de movimientos, al estar constreñido por un número pequeño (en comparación con la dimensión del espacio de fases total) de leyes de conservación. Así pues las conclusiones sobre el carácter del movimiento extraídas del sistema de los dos cuerpos no se pueden generalizar a sistemas de tres o más. ¿Cuáles eran esas conclusiones? Esencialmente que los sistemas ligados de dos cuerpos (es decir, cuando la energía total es negativa) realizan movimientos estrictamente periódicos, y que si tenemos un sistema que se puede reducir a varios subconjuntos de problemas de dos cuerpos sin interacción entre ellos, el movimiento en el espacio de

fase será cuasiperiódico, con frecuencias fundamentales correspondientes a los inversos de los periodos de cada subconjunto de dos cuerpos.

Pues bien, *estas conclusiones hay que abandonarlas al pasar a sistemas con mayor número de grados de libertad*. El movimiento acotado de un sistema tal no tiene porqué ser periódico o cuasiperiódico, sino que puede presentar una apariencia altamente irregular, explorando zonas amplias del espacio de fases permitido por las restricciones que imponen las constantes del movimiento. A estos comportamientos oscilantes irregulares se les llama *caóticos*, pero no hay que olvidar que son una consecuencia de una dinámica completamente determinista.

El caos se caracteriza por la extrema sensibilidad del sistema a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales. Dos de tales condiciones iniciales que al principio estén muy próximas en el espacio de fases divergen exponencialmente una de otra, con lo que tras un tiempo finito y relativamente breve las evoluciones temporales a que dan lugar son completamente distintas. La predicción a largo plazo se hace prácticamente imposible, pues requeriría un conocimiento infinitamente preciso de las condiciones de preparación del sistema.

Por lo tanto la conclusión que se impone es que las ecuaciones dinámicas fundamentales de la mecánica contienen posibilidades insospechadas que han permanecido ocultas por el hecho de haber concentrado la atención en los problemas más sencillos, que permiten una solución analítica. La extrapolación al caso general de lo observado en los ejemplos más simples, incluso si se trata de conclusiones cualitativas, es totalmente injustificada [Eke92], [Moo92], [Poi1892], [Rue91], [Ste91], [Sag88].

Hemos de mencionar aún un elemento esencial para la comprensión de los fenómenos que estamos discutiendo, que es la no linealidad. Desde un punto de vista técnico o formal podemos caracterizar esta propiedad diciendo que las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento dinámico son no lineales, es decir, que la suma de soluciones de tales ecuaciones *no* es a su vez solución del problema dinámico en general. Podríamos formular esta propiedad de manera muy intuitiva diciendo que en los sistemas no lineales no hay proporcionalidad estricta entre causa y efecto. Por lo tanto los efectos dinámicos en estos sistemas pueden ser considerablemente más sutiles y complicados que en su contrapartida lineal.

Volvamos por un momento al terreno de las matemáticas. Un sistema lineal es aquel regido por ecuaciones diferenciales lineales, y por lo tanto la suma de soluciones es también solución. Pero esto hace que si conocemos  $n$  soluciones independientes entre sí, entonces cualquier otra es suma de esas  $n$  soluciones de base, pesadas con los coeficientes adecuados (estamos pensando ahora en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias). Si, por centrar ideas, todas esas soluciones básicas son periódicas o cuasiperiódicas, la solución general tendrá ese mismo carácter, y por lo

tanto la solución general no aporta ninguna novedad dinámica a lo ya implícito en las soluciones particulares. Así pues en los sistemas lineales el obtener unas pocas soluciones particulares es una ayuda extraordinaria, puesto que por combinaciones lineales de las mismas se puede hallar el comportamiento del sistema en condiciones que no estaban recogidas en ninguna de dichas soluciones. Debido a estas propiedades tan simples, y a la posibilidad en muchos casos de hallar expresiones analíticas cerradas para las soluciones no es de extrañar que los sistemas lineales fueran de los primeros en ser estudiados y dominados en profundidad. Además, las aplicaciones prácticas conducen en muchos casos a ecuaciones que son en primera aproximación lineales, con lo cual la teoría no es solo simple y relativamente completa, sino enormemente relevante en la práctica.

Por lo tanto se impone la conclusión de que no es posible generalizar (ni siquiera cualitativamente) las propiedades de que gozan los sistemas lineales a los no lineales. Esto hace a los últimos mucho más difíciles de estudiar, puesto que todos los esfuerzos se concentraban hasta hace poco en lo que podríamos llamar el "paradigma lineal", que podríamos resumir diciendo que *los sistemas lineales son los fundamentales, cuando existen no linealidades suaves se usa la teoría de perturbaciones y cuando éstas son importantes no podemos calcular analíticamente lo que ocurre, pero el sistema se comportará cualitativamente según lo que sabemos de los sistemas lineales.*

El darse cuenta de que lo anterior es *radicalmente falso* supone un cambio de perspectiva científica que para algunos es comparable con las dos revoluciones conceptuales por antonomasia de la física del siglo XX, la relatividad y la mecánica cuántica.

Como ejemplo de sistema no lineal, tanto desde el punto de vista experimental como de su descripción teórica consideraremos brevemente el caso de la dinámica de fluidos. Con él vamos a introducir otro concepto dinámico fundamental que es el de *disipación*.

Esta disciplina fue fundada por L. Euler, quien en 1755 dedujo las ecuaciones de movimiento de un fluido incompresible ideal (sin efectos de viscosidad por tanto). En la primera mitad del siglo XIX G. Navier y G. Stokes ampliaron las ecuaciones propuestas por Euler de manera que tuvieran en cuenta la viscosidad, llegando a la expresión que lleva sus nombres

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} \quad (1.2)$$

siendo  $\vec{v}$  la velocidad,  $p$  la presión,  $\rho$  la densidad y  $\nu$  la viscosidad cinemática. El segundo término del miembro de la izquierda de (1.2) hace que estas ecuaciones sean

no lineales, al contener productos de la función incógnita (el campo de velocidades) por derivadas de la misma.

Un avance notable en la comprensión de (1.2) lo dio H. Reynolds quien observó que el carácter del movimiento predicho por las ecuaciones de Navier-Stokes no depende de la velocidad y la viscosidad por separado, sino de un parámetro adimensional que es esencialmente el cociente  $ul/\nu$ , conocido como número de Reynolds ( $Re$ ), donde  $u$  y  $l$  representan velocidades y escalas de longitud típicas en el movimiento del fluido [Lan89], [L'vo91].

Quizá lo más interesante desde el punto de vista de esta introducción sea la enorme dificultad que entraña la resolución de (1.2). Aunque se conocen numerosas soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes, suelen corresponder a situaciones muy idealizadas o de alta simetría, y lo que es acaso más grave, las soluciones calculadas para números de Reynolds bajos pierden su estabilidad en general al aumentar éste por encima de un cierto umbral, lo que les confiere una utilidad más bien limitada. Desde un punto de vista experimental sabemos que el movimiento real de los fluidos en la naturaleza puede ser extraordinariamente complicado, con gran variedad de escalas temporales y espaciales presentes simultáneamente. A un estado tal de movimiento se le denomina turbulento, y al ser de aparición tan frecuente no hay más remedio que intentar estudiarlo con el mayor detalle posible, aunque sólo fuera teniendo en cuenta las aplicaciones prácticas en las que la turbulencia es un fenómeno relevante. ¿Cómo surge el comportamiento turbulento? Aún hoy no existe una respuesta clara y precisa a esta cuestión, aunque los progresos tendentes a resolverla han sido enormes. Sin embargo sí que podemos decir qué ocurre en los primeros estadios, cuando el comportamiento ordenado (o laminar) de un fluido cambia de carácter al ir aumentando  $Re$ . Ocurre que la solución básica de partida pierde su estabilidad para un cierto valor umbral del número de Reynolds, y es sustituida por otra de comportamiento espacial y/o temporal más complejo. Si por ejemplo el flujo del fluido era tal que el campo de velocidades no dependía del tiempo, se puede pasar a otro en el que se superpone a la velocidad anterior una componente periódica. Es conveniente señalar que esta primera transición puede ser predicha de manera rigurosa por un análisis perturbativo de la estabilidad lineal de la solución de partida. Este análisis proporciona además el valor umbral del número de Reynolds para el cambio de régimen dinámico.

Alentada quizá por este primer éxito surgió la primera teoría que intentaba dar cuenta de la transición completa desde el comportamiento ordenado al turbulento. Según ella, al ir aumentando progresivamente  $Re$  se irían excitando nuevos modos de frecuencias inconmensurables con los anteriores, de forma que *el movimiento se podría interpretar como una superposición lineal de modos cuyas frecuencias son irracionales entre sí y las fases entre los mismos aleatorias*. En el límite  $Re$ -

$>\infty$  se excitarían un número infinito de modos, lo cual daría al flujo del fluido su característico aspecto desordenado, complejo o turbulento. Esta es, en líneas generales, la teoría de Landau-Hopf de la turbulencia (véase [Lan89], especialmente el capítulo 3).

Antes de continuar quisiéramos unir las dos líneas de pensamiento que hemos dejado abiertas, analizar con algo más de detalle sus diferencias y similitudes e intentar hallar en estas últimas ese hilo conductor que ha permitido un cambio profundo en nuestras ideas del comportamiento dinámico de los sistemas físicos.

A primera vista sólo aparecen diferencias. En efecto, mientras que la descripción de la dinámica planetaria se basa en ecuaciones diferenciales ordinarias conservativas, el movimiento de los fluidos se describe mediante una ecuación en derivadas parciales disipativa, es decir, una ecuación en la cual la energía mecánica no se conserva, puesto que termina por disiparse debido a la viscosidad en las escalas espaciales más pequeñas. Sin embargo hay dos elementos que comparten: ambas descripciones usan ecuaciones no lineales, y en los dos casos se observa que los comportamientos experimentales pueden ser de gran complejidad, incluso en condiciones experimentales aparentemente muy sencillas.

El descubrimiento fundamental que ha permitido una renovación casi completa de nuestras ideas sobre la dinámica ha sido que *sistemas muy simples* de ecuaciones diferenciales no lineales (sistemas que son completamente deterministas por tanto) *pueden dar lugar a comportamientos espaciotemporales muy complejos, irregulares, caóticos o turbulentos*. Al estar incluidos estos comportamientos en las ecuaciones dinámicas básicas es más sencillo entender de dónde surgen las irregularidades que de hecho presentan los sistemas reales, sin tener que acudir para su explicación a ruidos aleatorios externos al sistema o a la consideración de un número infinito de modos excitados. Simplemente la dinámica permite, y en algunos casos casi diríamos que impone u obliga a la diversidad, a la inestabilidad y al caos creadores de nuevas estructuras [Pri93a-b].

Creemos que esos dos puntos constituyen el hilo conductor del que hablábamos más arriba: la no linealidad es la fuente de nuevas estructuras, de nuevas posibilidades dinámicas, que se pierden completamente en las teorías lineales. Como consecuencia, la extrapolación de las conclusiones (e incluso de los hábitos de pensamiento) de la física lineal al ámbito no lineal ha de ser por fuerza inexacta, no sólo cuantitativa sino cualitativamente. Volviendo el argumento anterior del revés parece que la complejidad, la turbulencia, las inestabilidades dinámicas, que son inexplicables dentro del marco lineal, tengan su explicación en el de las teorías no lineales, aunque las dificultades analíticas para establecer estos resultados sean hoy en día extraordinarias.

A nuestro juicio una de las mayores aportaciones de la exploración de la dinámica no lineal ha sido aumentar nuestra confianza en que los fenómenos complejos, ubicuos

en la naturaleza, son explicables en sus rasgos generales por las teorías bien fundamentadas de la física, pero sólo a consta de utilizarlas más allá de las aproximaciones lineales que sabemos manejar analíticamente.

En relación con los problemas planteados por la turbulencia, el trabajo pionero de Ruelle y Takens [Rue71] fue decisivo a la hora de señalar que la explicación tradicional del surgimiento de la misma era matemáticamente improbable, sustituyéndola por lo que hoy se conoce como vía al caos Ruelle-Takens. Sus dos primeros estadios son como en la teoría de Landau-Hopf: una solución independiente del tiempo pierde su estabilidad y surge una solución periódica para un cierto valor de uno de los parámetros de control de las ecuaciones de turno. Al ir variando dicho parámetro se pasa a una nueva situación en la que la solución periódica pierde su estabilidad y aparece una solución cuasiperiódica con dos frecuencias básicas irracionales entre sí y sus combinaciones lineales (movimiento en un toro). El siguiente cambio dinámico es enteramente diferente sin embargo. Ruelle y Takens probaron que la sustitución de la solución cuasiperiódica con dos frecuencias irracionales entre sí por otra con tres era estructuralmente inestable, y que lo que aparecería en cambio sería un objeto geométrico complicado aunque de baja dimensión hacia el que tendería la solución del sistema de ecuaciones, y que se denomina *atractor extraño*. En dicho atractor la evolución dinámica del sistema continúa indefinidamente sin que por ello sea periódica o cuasiperiódica. Este descubrimiento es básico para nuestra comprensión actual de la dinámica no lineal.

Otros mecanismos bien conocidos de la transición orden-caos son el doblado de periodo (o cascada subarmónica) y la intermitencia.

En el primero de ellos a cada nueva transición dinámica del sistema (producida por el incremento de un parámetro de control p.e.) *se dobla el periodo de la solución*, llegando un momento en el que la misma se hace caótica. Los valores del parámetro de control para los que se producen los sucesivos doblados de periodo se acumulan en progresión geométrica hacia un valor límite; la constante que da la tasa de aproximación al límite es un número universal conocido como constante de Feigenbaum ( $\approx 4.6692$ ). Este es uno de los resultados fundamentales de la teoría del caos, que muestra que existe un orden estricto subyacente a la progresiva complejidad de la evolución dinámica, al menos para una clase relativamente amplia de sistemas [Ste91].

La intermitencia consiste en la alternancia de zonas de evolución ordenada (o laminar, por emplear la terminología de la mecánica de fluidos) con otras de evolución caótica, siendo los intervalos temporales entre ambas y la duración de las fases turbulentas aleatorios [Ber88].

Quisiéramos acabar este epígrafe presentando de una manera informal (aunque las afirmaciones que hagamos sean lo más rigurosas posible) los elementos básicos de la

teoría de sistemas dinámicos disipativos regidos por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Sin duda estos sistemas son los de mayor importancia para los aspectos teórico-numéricos de esta memoria, por lo que creemos que merece la pena detenerse en ellos.

Sea un sistema descrito por un vector  $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$  perteneciente a  $\mathbf{R}^n$ , donde cada  $x_i$  representa una magnitud física relevante para el problema en cuestión, y cuyas ecuaciones de evolución se puedan escribir en la forma

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}; t) \\ \bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0; \bar{\boldsymbol{\alpha}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

, donde  $\boldsymbol{\alpha}$  es el vector de parámetros de control y  $\mathbf{f}$  es una función suave de sus argumentos. Supondremos como mínimo que  $\mathbf{f}$  pertenece a la clase  $C^1$ , aunque en las aplicaciones que estudiaremos en esta memoria  $\mathbf{f}$  es de hecho una función analítica (polinomial).

Si el parámetro  $t$  aparece explícitamente en el segundo miembro de (1.3) diremos que el sistema dinámico es no autónomo, y diremos que es autónomo en el caso contrario. Nos centraremos en el estudio de los sistemas autónomos, que son los más adecuados para describir comportamientos dinámicos autogenerados, sin influencias o fuerzas externas dependientes del tiempo.

Al espacio en el que se desarrolla la dinámica ( $\mathbf{R}^n$  por lo general) lo denominaremos espacio de fase del sistema. Es posible considerar espacios que sean localmente como  $\mathbf{R}^n$ , pero cuya topología global sea diferente (variedades diferenciables), pero no creemos necesario entrar aquí en esos tecnicismos.

Con las condiciones impuestas hasta ahora podemos ya aplicar el teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, y decir que el problema modelado por (1.3) posee solución única durante un cierto intervalo de tiempo para toda condición inicial elegida. Bajo hipótesis algo más restrictivas se puede probar la existencia de solución para todo  $t > 0$ , y por supuesto, en caso de poder prolongar la solución de esta forma, sería asimismo única [Guc83], [Per91]. El resultado anterior es la expresión matemática del determinismo de la dinámica, es decir, del hecho físico de que las condiciones iniciales de preparación del sistema más la especificación de la ley de evolución (1.3) bastan para determinar cuál será el estado del sistema para todo tiempo posterior.

Puede ser interesante recordar que la existencia y unicidad de (1.3) no depende en absoluto del carácter lineal o no lineal de las ecuaciones, o de que la dinámica predicha por las mismas sea más o menos compleja, sino tan sólo de una condición relativamente poco exigente para  $\mathbf{f}$ .

La visión moderna de la dinámica de sistema regidos por ecuaciones como (1.3) tuvo sus orígenes en la obra de Poincaré [Poi1892]. Para entonces ya estaba claro que la solución de las ecuaciones (1.3) era, en general, imposible de hallar analíticamente, y que por lo tanto era necesario extraer el máximo de información de las mismas por métodos cualitativos o geométricos. Es así como surgió originalmente la necesidad de considerar el comportamiento de un conjunto más o menos grande de condiciones iniciales, para de esta manera hacerse una idea global de la dinámica del sistema. El concepto matemático de flujo definido por (1.3) es el encargado de dar la precisión necesaria a este requerimiento.

Decimos por tanto que las ecuaciones (1.3) con campo vectorial dado en el espacio de fase por  $f$  definen un (semi)grupo uniparamétrico de transformaciones del espacio de fase en sí mismo  $\Phi_t$  tal que  $\Phi_t(x(\tau))=x(t+\tau)$  y  $\Phi_t\Phi_s=\Phi_{t+s}$  [Guc83], [Per91]. Como objeto geométrico que resume la dinámica de (1.3)  $\Phi$  nos permite contemplar la acción global de ésta como una transformación del espacio de fase en sí mismo, y por las características de dicha transformación.

Volvamos al sistema (1.3) para introducir algunos conceptos necesarios para un análisis del mismo.

Por puntos de equilibrio entenderemos aquellos vectores  $x_e$  de  $\mathbf{R}^n$  tales que  $f(x_e, \alpha)=0$ . La existencia y tipo de tales puntos son fundamentales para una primera imagen cualitativa de la dinámica.

Los puntos de equilibrio tal como los hemos definido más arriba son soluciones independientes del tiempo de (1.3). Una pregunta que surge inmediatamente una vez hallados esos puntos es la de su estabilidad (lineal). Es decir, nos estamos preguntando si los comportamientos independientes del tiempo dados por  $x_e$  se mantendrán al introducir una pequeña perturbación  $\delta x_e$ . Si es este el caso tal comportamiento será observable; en caso contrario la pequeña perturbación inicial crecerá hasta dar lugar a una nueva trayectoria en el espacio de fase, que puede acabar en otro punto de equilibrio distinto o en una trayectoria fásica más complicada, según veremos.

El análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio se hace linealizando (1.3) para pequeñas perturbaciones

$$\bar{X} \equiv \bar{x}_e + \delta \bar{x} \Rightarrow \dot{\bar{X}} = \delta \dot{\bar{x}} = \tilde{f}(\bar{x}_e + \delta \bar{x}, \bar{\alpha}) \approx \tilde{f}(\bar{x}_e, \bar{\alpha}) + d\tilde{f}\big|_{\bar{x}_e} \delta \bar{x} = d\tilde{f}\big|_{\bar{x}_e} \delta \bar{x} \quad (1.4)$$

, donde  $d\tilde{f}$  es la aplicación diferencial (aplicación lineal de  $\mathbf{R}^n$  en  $\mathbf{R}^n$ ) calculada en  $x_e$ . El cálculo de los autovalores de  $d\tilde{f}$  (supuesta distinta de cero) permite decidir la estabilidad o inestabilidad del punto de equilibrio considerado mediante el siguiente



criterio: si todos los autovalores de  $df$  tienen su parte real estrictamente negativa entonces el punto de equilibrio es estable. En caso de que exista algún autovalor con parte real estrictamente positiva el punto de equilibrio será inestable, y en el caso (atípico, no genérico) de que la parte real de todos los autovalores sea cero hay que recurrir a órdenes de perturbación más altos para poder decir algo significativo sobre la estabilidad o inestabilidad del punto de equilibrio.

Una clasificación muy detallada de los tipos de puntos de equilibrio en aproximación lineal, con las distinciones entre nodos estables e inestables, puntos de silla o centros puede verse en las referencias [Guc83], [Per91].

La importancia de los puntos de equilibrio en los que ningún autovalor tiene parte real igual a cero radica en que las conclusiones obtenidas del análisis lineal se pueden generalizar, en cierto sentido, a las que obtendríamos del análisis completo de (1.3). De manera precisa podemos enunciar el siguiente teorema (Hartman-Grobman): si la aplicación diferencial del sistema (1.3) calculada en el punto de equilibrio  $x_e$  no tiene ningún autovalor puramente imaginario (punto de equilibrio hiperbólico), entonces existe un homeomorfismo en un entorno de dicho punto que lleva las trayectorias del sistema no lineal (1.3) a las del (1.4). Imponiendo condiciones adicionales sobre los autovalores se puede probar un teorema más fuerte que relaciona localmente las órbitas de ambos sistemas mediante un difeomorfismo (teorema de Sternberg) [Guc83].

Los autovalores de la aplicación linealizada  $df$  se pueden clasificar en tres grupos según que su parte real sea positiva, negativa o nula. Los autovalores con parte real positiva llevarán asociados ciertos autovectores; las combinaciones lineales arbitrarias de los mismos definen un subespacio lineal invariante (es decir, que la dinámica transforma todo punto de ese subespacio en otro perteneciente al mismo) de (1.4) tal que las trayectorias inicialmente próximas al punto de equilibrio se alejan de él. A este subespacio se le denomina *variedad inestable* del punto de equilibrio dado. De manera completamente análoga se definen las variedades estable (asociada a los autovalores con parte real estrictamente negativa) y centro (asociada a los autovalores puramente imaginarios).

Un resultado fundamental de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias es que las variedades invariantes inestable, estable y centro existen para el sistema no lineal (1.3), y que son localmente tangentes a los subespacios correspondientes de (1.4) definidos más arriba. Una gran cantidad de comportamientos dinámicos complejos surge cuando se producen intersecciones entre las variedades estables e inestables asociadas a uno o varios puntos de equilibrio del sistema. Para más detalles se pueden consultar las referencias [Guc83], [Eck85] y [Per91].

Más adelante discutiremos otros comportamientos dinámicos más complejos (ciclos límites, atractores cuasiperiódicos y atractores extraños), a los cuales se pueden

asociar también variedades estables, inestables y centro que ayudan a clarificar las posibilidades dinámicas implícitas en (1.3) [Eck85].

Hemos expuesto con algún detalle la teoría local de la estabilidad lineal para perturbaciones pequeñas de un estado de equilibrio, y hemos visto que las conclusiones obtenidas son relevantes para la dinámica no lineal local en el caso de que los puntos de equilibrio sean hiperbólicos. En caso de puntos de equilibrio tipo centro en la aproximación lineal (todos los autovalores tienen parte real estrictamente nula), existen otros métodos que pueden permitir en algunos casos establecer o no la estabilidad de los mismos, como el método de las funciones de Lyapunov, descrito en [Per91]. El método de las funciones de Lyapunov, que se inspira en una generalización del concepto de energía tomado de la mecánica, permite además establecer la estabilidad o inestabilidad *global* de ciertos puntos de equilibrio, es decir, no está limitado a considerar perturbaciones pequeñas.

Creemos que este es el momento adecuado para definir el importante concepto de dinámica disipativa en sistemas regidos por ecuaciones del tipo (1.3). Para ello imaginemos que quisiéramos seguir la evolución temporal de un número muy grande de condiciones iniciales encerradas en un volumen finito del espacio de fases limitado por una superficie suave. Llamemos  $V_0$  al volumen inicial del espacio de fases ocupado por las condiciones iniciales que hemos separado mentalmente. Si dejamos evolucionar dichas condiciones iniciales bajo el flujo definido por (1.3) tendremos que  $V_t = \Phi_t(V_0)$ , obteniéndose así el volumen ocupado por las mismas en el tiempo  $t$ . Diremos que la dinámica es disipativa si el límite cuando el tiempo tiende a infinito de  $V_t$  es igual a cero; también se dice en este caso que el flujo contrae el volumen en el espacio de fases. El hecho de que el flujo contraiga el volumen total no excluye el que existan direcciones concretas del espacio de fases que puedan sufrir dilataciones. Para que exista disipación sólo se exige que el balance global entre ambas tendencias sea favorable a la contracción del volumen. La presencia simultánea de direcciones de dilatación y contracción es causa de gran parte de los comportamientos dinámicos complejos en los que estamos interesados.

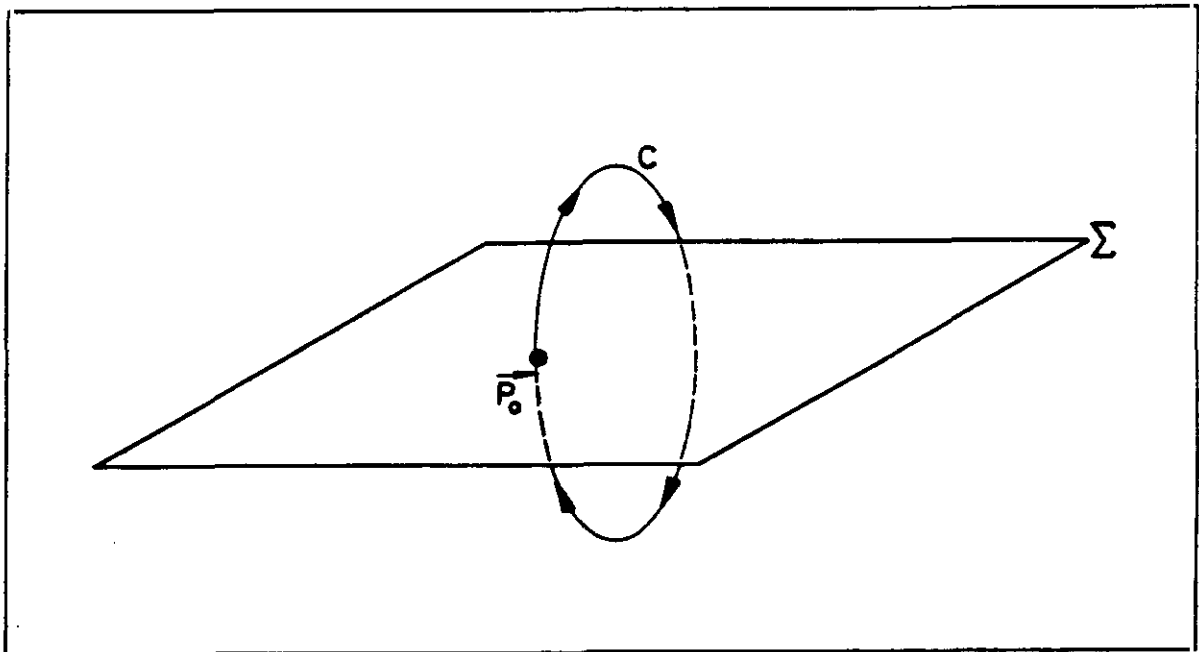
En los sistemas deterministas y disipativos la dinámica asintótica termina convergiendo hacia un conjunto cerrado, acotado e invariante bajo  $\Phi$  que se conoce como atractor. Los ejemplos más simples y mejor conocidos son el punto fijo estable, el ciclo límite (trayectoria periódica aislada) y la trayectoria cuasiperiódica estables. Sin embargo, no son éstas ni mucho menos todas las posibilidades.

A modo de comparación observemos que en el caso de sistemas hamiltonianos (que tienen cantidades conservadas como la energía) el volumen del espacio de fases se conserva bajo la evolución temporal (teorema de Liouville). En dichos sistemas no pueden darse atractores en el sentido definido más arriba. Desde un punto de vista más intuitivo (o más físico si se prefiere) podríamos decir que la disipación está ligada a

transformaciones irreversibles de la energía (como la conversión de energía cinética en calor debido al rozamiento), de tal manera que la suministrada por una fuente externa (forzado del sistema) o por el mismo sistema en el caso de los autooscilantes, se disipa irreversiblemente por procesos de rozamiento, transferencia de calor, radiación, viscosidad, etc, de manera que se produce un equilibrio dinámico entre generación y pérdidas.

Al igual que en el caso de los puntos de equilibrio, los otros atractores elementales que hemos ido introduciendo pueden ser estables o inestables dependiendo de que una pequeña perturbación de los mismos decaiga con el tiempo o se amplifique. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría con los puntos de equilibrio, es bastante difícil establecer analíticamente la estabilidad o no de un ciclo límite o de una trayectoria cuasiperiódica. Dado que esta cuestión será importante cuando hablemos más tarde de bifurcaciones vamos a dar una idea de cómo se establece la estabilidad o inestabilidad de los otros atractores elementales arriba mencionados.

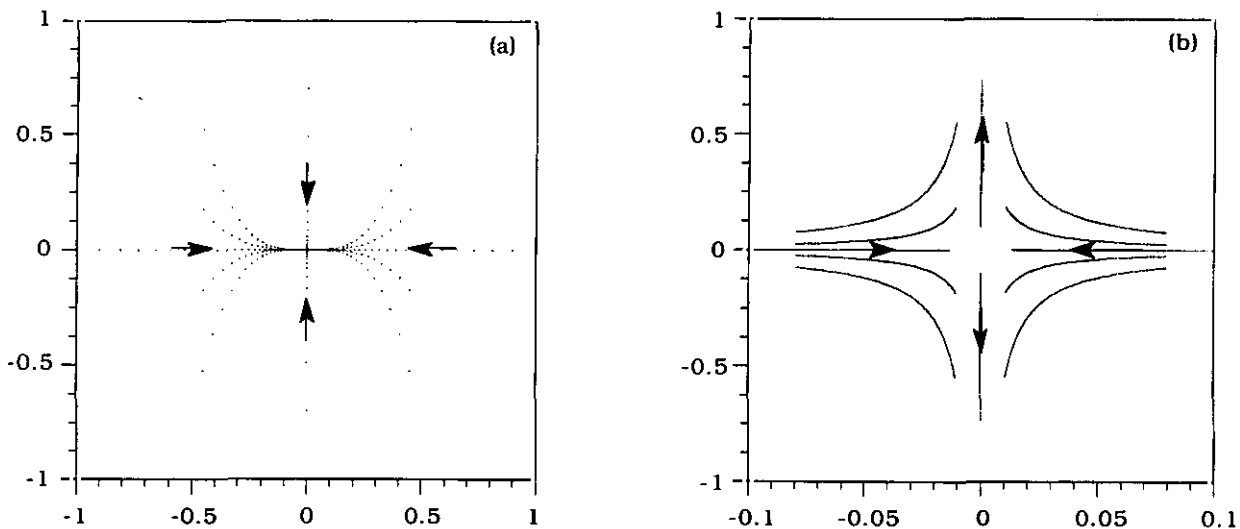
Un ciclo límite es una trayectoria cerrada, acotada y aislada que es solución de las ecuaciones (1.3) y que representa una oscilación periódica del vector de estado (esta oscilación periódica no será sinusoidal en general). Sea  $p_0$  un punto perteneciente al ciclo límite y  $\Sigma$  una superficie localmente transversal al atractor en  $p_0$  (figura 1.1).



**Figura 1.1.** Representación esquemática de un ciclo límite y una superficie transversal al mismo en el punto  $p_0$  (sección de Poincaré).

Demos a  $p_0$  un pequeño incremento  $p_0 + \delta p$ , y sigamos la evolución de dicho punto anotando las sucesivas intersecciones con la superficie  $\Sigma$ . Por comodidad podemos suponer que  $p_0 + \delta p$  pertenece a  $\Sigma$  y entonces lo que obtendríamos al ir anotando las diversas intersecciones de la trayectoria originada en dicho punto es una transformación de  $\Sigma$  en  $\Sigma$  que deja fijo  $p_0$  y que transforma la intersección  $n$ -ésima de la trayectoria con  $\Sigma$  en la  $(n+1)$ -ésima. La transformación que se obtiene es invertible, hecho que está ligado a que las ecuaciones diferenciales del sistema pueden predecir la evolución de una determinada condición inicial tanto hacia el futuro como hacia el pasado. Llamaremos a dicha transformación la transformación de Poincaré asociada al ciclo  $C$ , y la denotaremos por  $\Pi_C$ . La estabilidad o inestabilidad del ciclo límite  $C$  se reduce pues a la estabilidad o inestabilidad del punto fijo  $p_0$  con respecto a la aplicación  $\Pi_C$ . Se puede demostrar que la condición de estabilidad lineal de  $p_0$  bajo  $\Pi_C$  es que los autovalores de  $d\Pi_C$  estén todos dentro del círculo unidad en el plano complejo [Rue88].

En la figura 1.2 podemos ver una representación simplificada de los conceptos de estabilidad e inestabilidad asociados a un ciclo límite y el aspecto de la aplicación  $d\Pi_C$  en ambos casos.



**Figura 1.2.** La aplicación no lineal  $\Pi_{p_0}$  deja fijo  $p_0$ . Si linealizamos dicha aplicación, ésta puede presentar típicamente comportamientos como los dibujados en (a) y (b). En el primer caso el ciclo límite sujeto a estudio es estable, mientras que en el segundo sería inestable.

Como es lógico, este tipo de tratamiento del problema de la estabilidad se puede generalizar a otros tipos de trayectorias más complicadas, como por ejemplo las cuasiperiódicas, aunque las dificultades analíticas y numéricas se incrementan notablemente.

Otro concepto muy importante a la hora de discutir la dinámica de los sistemas no lineales es el de bifurcación. Más específicamente discutiremos el concepto de bifurcación asociada a cambios progresivos en un parámetro de control ( $\alpha_i$ ) de los que aparecen como argumentos de la función  $\mathbf{f}$  en las ecuaciones (1.3). Aunque este concepto admite una formulación matemática totalmente rigurosa, nosotros vamos a dar aquí una descripción operacional del mismo que creemos será suficiente en la práctica. Diremos que se ha producido una bifurcación al tomar  $\alpha_i$  el valor  $\alpha_{ibif}$  cuando para este valor del parámetro haya un cambio cualitativo en la dinámica del sistema. Por ejemplo, si para valores menores que  $\alpha_{ibif}$  el comportamiento asintótico era independiente del tiempo (el sistema tendía a un punto de equilibrio estable) y para valores mayores de  $\alpha_{ibif}$  el comportamiento asintótico es periódico diremos que en  $\alpha_{ibif}$  ha tenido lugar una bifurcación (bifurcación de Hopf en este caso).

Otros ejemplos de bifurcaciones pueden ser la creación o destrucción de puntos de equilibrio al variar un parámetro de control, el cambio en el carácter de dichos puntos (pasar de estables a inestables o viceversa), o el paso de un comportamiento asintótico periódico a otro cuasiperiódico. Matemáticamente una bifurcación ocurre para aquellos valores del parámetro de control  $\alpha_i$  para los cuales el campo vectorial dado por  $\mathbf{f}$  no es estructuralmente estable. Esta definición técnica es raramente usada en la práctica para establecer la existencia de bifurcaciones, y conlleva además dificultades teóricas considerables [Rue88].

Creemos que la idea de bifurcación es muy próxima al trabajo científico cotidiano, en el que un sistema se estudia variando algún parámetro accesible al experimentador y preguntándose cómo varía el comportamiento del mismo bajo estos cambios. Suponemos, como suele ser el caso, que las leyes de movimiento (o la dinámica) no se modifican (es decir, no cambiamos la función  $\mathbf{f}$  en (1.3) por otra función  $\mathbf{g}$ ), sino sólo los controles experimentales que aparecen en  $\mathbf{f}$  a través del vector  $\alpha$ .

Quizá un ejemplo concreto nos ayude a fijar las ideas a este respecto. Supongamos un experimento de convección en el que tenemos un fluido situado entre dos placas, sometido a un cierto gradiente de temperatura, de modo que la placa inferior tenga mayor temperatura que la superior. Parece obvio que un cambio en el gradiente de temperatura  $\Delta=(T_1-T_0)/h$  no cambia las ecuaciones dinámicas, que en este caso serán las de Navier-Stokes y de transferencia del calor con sus correspondientes condiciones de contorno. Sin embargo, al cambiar  $\Delta$  se observa que para un cierto  $\Delta_c$  el estado estacionario y espacialmente uniforme pierde su estabilidad y en su lugar aparece una estructura espacial consistente en células de convección; para valores mayores de  $\Delta$

puede tener lugar una nueva bifurcación, y la velocidad del fluido en un punto presenta ahora un carácter periódico (véase [Cro93] para una discusión detallada de la formación de patrones espaciotemporales en sistemas fluidos). Este sería un ejemplo prototípico de bifurcación en un sistema dinámico.

En los sistemas no lineales es frecuente que las bifurcaciones se sucedan al ir incrementando (o disminuyendo) un determinado parámetro de control, y que además las tales bifurcaciones den lugar a comportamientos progresivamente más complejos.

Cuando el estado final al que se llega tras las sucesivas bifurcaciones es muy complejo e irregular en el tiempo, presenta un espectro de Fourier ancho y baja autocorrelación temporal se suele hablar de caos determinista. Precisaremos a continuación una definición más formal de este importante concepto, que permite establecer una relación entre nuestras ideas sobre la determinación (más o menos estricta) de los procesos físicos por las leyes naturales y la prácticamente infinita variedad de comportamientos que nos ofrece la naturaleza. Para ello vamos a necesitar definir lo que son los exponentes de Lyapunov.

Dicho de forma rápida son unas cantidades que determinan la tasa de separación (si el exponente es positivo) o de aproximación (si es negativo) entre dos trayectorias inicialmente muy próximas entre sí en el espacio de fases. En sistemas dinámicos como los descritos por (1.3) el número de exponentes de Lyapunov coincide con la dimensión del espacio de fases, lo que corresponde a medir la tasa de separación o aproximación a lo largo de las posibles direcciones linealmente independientes.

Diremos entonces que un sistema dinámico es caótico cuando al menos uno de sus exponentes de Lyapunov sea estrictamente positivo.

Los sistemas caóticos en el sentido anterior suelen llevar asociados como atractores asintóticos conjuntos realmente complicados en el espacio de fases, conjuntos cuya dimensión es fraccionaria en el sentido de Hausdorff, y a los que se denomina por esta razón *fractales*. La forma de medir la dimensión de Hausdorff de un conjunto es contar, dada una escala de longitudes definida por un número real positivo  $\epsilon$ , el mínimo número de hipercubos disjuntos de arista igual a  $\epsilon$  necesarios para cubrir completamente el conjunto dado ( $N(\epsilon)$ ), y tomar el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{|\ln \epsilon|} \quad (1.5).$$

Las dimensiones de Hausdorff fraccionarias se corresponden con conjuntos que presentan estructuras de detalle y complejidad a todas las escalas de  $\epsilon$ . Un ejemplo típico de conjunto fractal conocido hace tiempo es el conjunto perfecto de Cantor. La clase de objetos fractales en la que estamos interesados es la generada por la evolución de sistemas dinámicos del tipo (1.3), y por lo tanto se trata de objetos localmente

suaves, con buenas propiedades de continuidad, diferenciabilidad, etc, pero que observados globalmente presentan una complejidad extrema (a menudo muy bella), que resulta muchas veces difícil de traducir en palabras. A estos conjuntos fractales surgidos de una dinámica caótica determinista se les suele denominar atractores extraños. Dado un atractor (caótico o no), el conjunto de puntos del espacio de fases que bajo la evolución temporal tiende asintóticamente a dicho atractor se denomina cuenca de atracción del mismo.

La inestabilidad dinámica de muchos sistemas no lineales, y por lo tanto la posibilidad de comportamientos caóticos, hace que la descripción del estado asintótico se tenga que hacer usando tanto conceptos propios del análisis como otros de carácter estadístico. Hemos visto anteriormente que la dimensión fractal nos servía para caracterizar una propiedad global de los atractores extraños que no se expresa bien con los medios de la geometría tradicional. Otras herramientas de tipo estadístico, basadas en la teoría ergódica de los sistemas dinámicos, son la densidad de medida invariante en el atractor o la entropía de Kolmogorov. En el primer caso se trata de caracterizar mediante una función definida en el atractor cuáles son las zonas del mismo visitadas con mayor o menor frecuencia, lo que puede ser de gran utilidad al considerar la evolución de un gran número de condiciones iniciales, dado que el carácter caótico de la evolución temporal implica la falta de conocimiento detallado de tales trayectorias para tiempos muy grandes. La entropía de Kolmogorov está ligada a la pérdida de información que supone la imposibilidad de predicción detallada de un sistema caótico más allá de un cierto intervalo temporal  $\Delta t$ . Esto significa que si calculásemos la evolución temporal con unas condiciones iniciales variadas  $\delta x$  con respecto a unas de referencia, pasado un tiempo  $\Delta t$  que es inversamente proporcional a la entropía de Kolmogorov, las evoluciones de esas dos condiciones iniciales no tienen porqué parecerse en absoluto (salvo en el hecho de que evolucionarán en el atractor extraño del sistema caótico).

Las dimensiones fractales, las medidas invariantes, la entropía de Kolmogorov y sus aplicaciones al estudio de los sistemas dinámicos caóticos se discuten en detalle en [Eck85]. En esta memoria hemos usado un algoritmo que calcula una aproximación a la dimensión fractal (algoritmo de Grassberger-Procaccia) para la caracterización de los atractores experimentalmente observados en los láseres de colorantes y  $\text{CO}_2$ . La descripción de dicho algoritmo la haremos en el capítulo 2.

Para concluir esta sección dedicada a la renovación experimentada por la dinámica con el descubrimiento de la inestabilidad intrínseca de los sistemas no lineales, vamos a introducir un sistema de la forma (1.3) que representa el acoplo de dos láseres monomodo y también el de dos osciladores electrónicos del tipo considerado por van der Pol y van der Mark (1927) [Pas93b]. Con él ilustraremos prácticamente todas las nociones sobre sistemas no lineales que hemos discutido antes, u otras como la

multiestabilidad, el papel de las simetrías en los sistemas dinámicos, la histéresis y la posibilidad de cuencas de atracción fractales, que son aspectos que suscitan un creciente interés en el análisis de estos sistemas.

El modelo propuesto es el siguiente

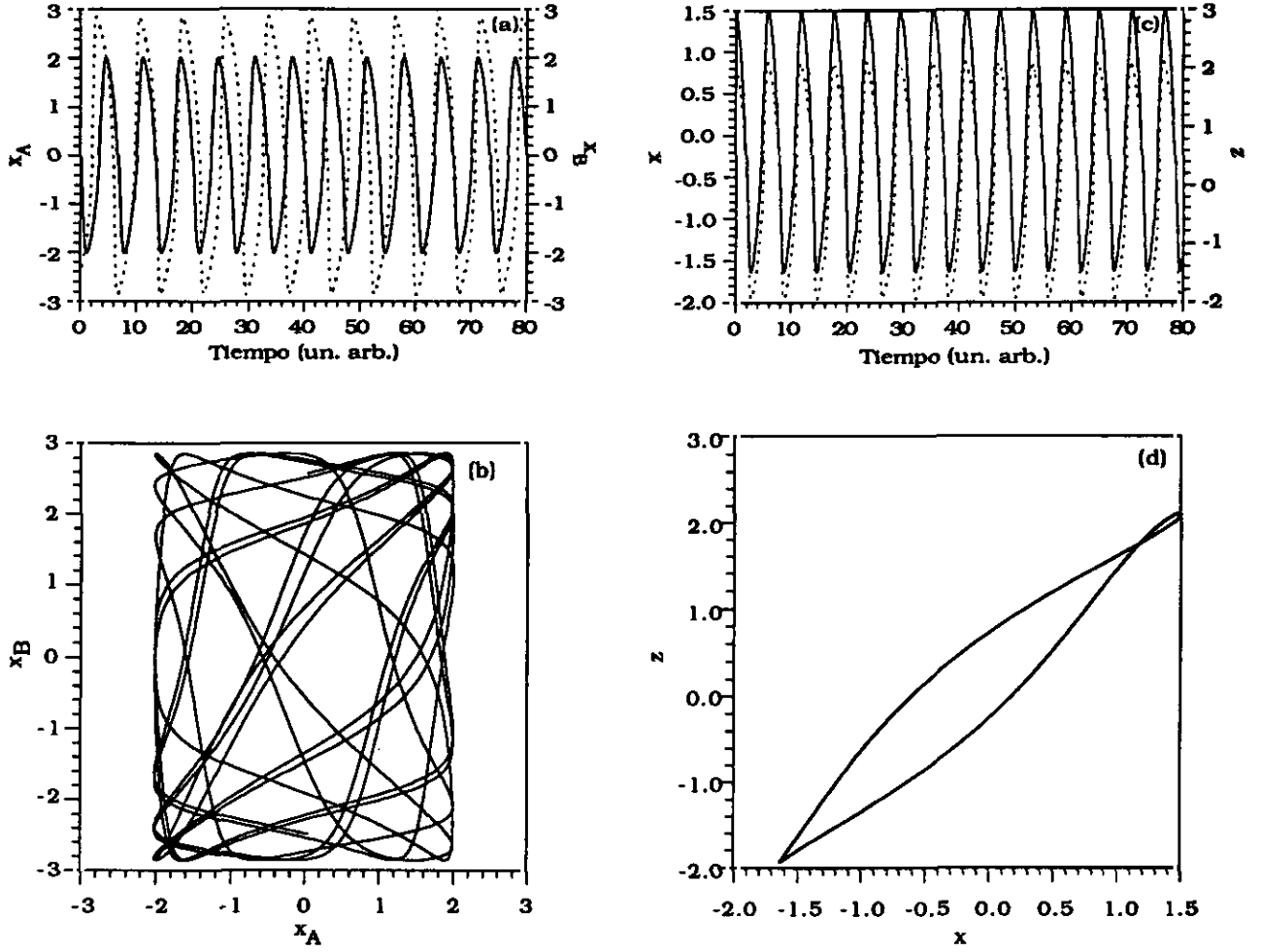
$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\varepsilon_1 - (x + \beta z)^2)y - (x + \beta z) \\ \dot{z} &= v \\ \dot{v} &= (\varepsilon_2 - (z + \alpha x)^2)v - (z + \alpha x) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

donde  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son los parámetros de control. Según la combinación de parámetros de control empleados podemos obtener desde sincronización de frecuencias hasta comportamiento caótico determinista. La alta simetría del acoplo considerado hace que los atractores posibles del sistema anterior (sean caóticos o no) deban presentar la simetría de las ecuaciones subyacentes, o en su defecto aparecer en pares de manera que se restaure la simetría exacta de las mismas (véase [Pas93b]). Dado que la simetría aparece como un ingrediente fundamental en multitud de problemas dinámicos es muy interesante considerar los efectos de la misma en el comportamiento de la dinámica global. En el caso considerado por nosotros se pueden dar bifurcaciones que destruyan la simetría, y que dan lugar a la coexistencia de varios atractores caóticos o regulares para unos valores fijos de los parámetros de control. Esta multiestabilidad trae como consecuencia práctica la posibilidad de histéresis en el sistema, es decir, el que el comportamiento asintótico pueda cambiar cualitativamente cuando un parámetro de control realiza un cambio cíclico.

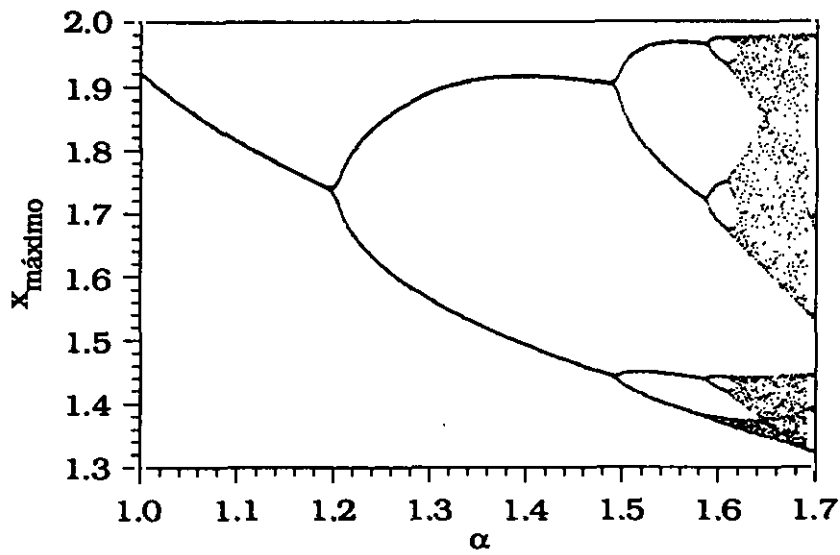
En los sistemas en los que está presente la multiestabilidad suele ocurrir que las cuencas de atracción correspondientes a los distintos atractores tienen una estructura fractal y se imbrican unas con otras de manera muy compleja en el espacio de fases. Como consecuencia el estado final asintótico es muy sensible a las condiciones de preparación, lo que resalta aún más la necesidad de un tratamiento de tipo estadístico de las propiedades de estos sistemas.

Las figuras que siguen intentan resumir de forma gráfica los aspectos antes mencionados.

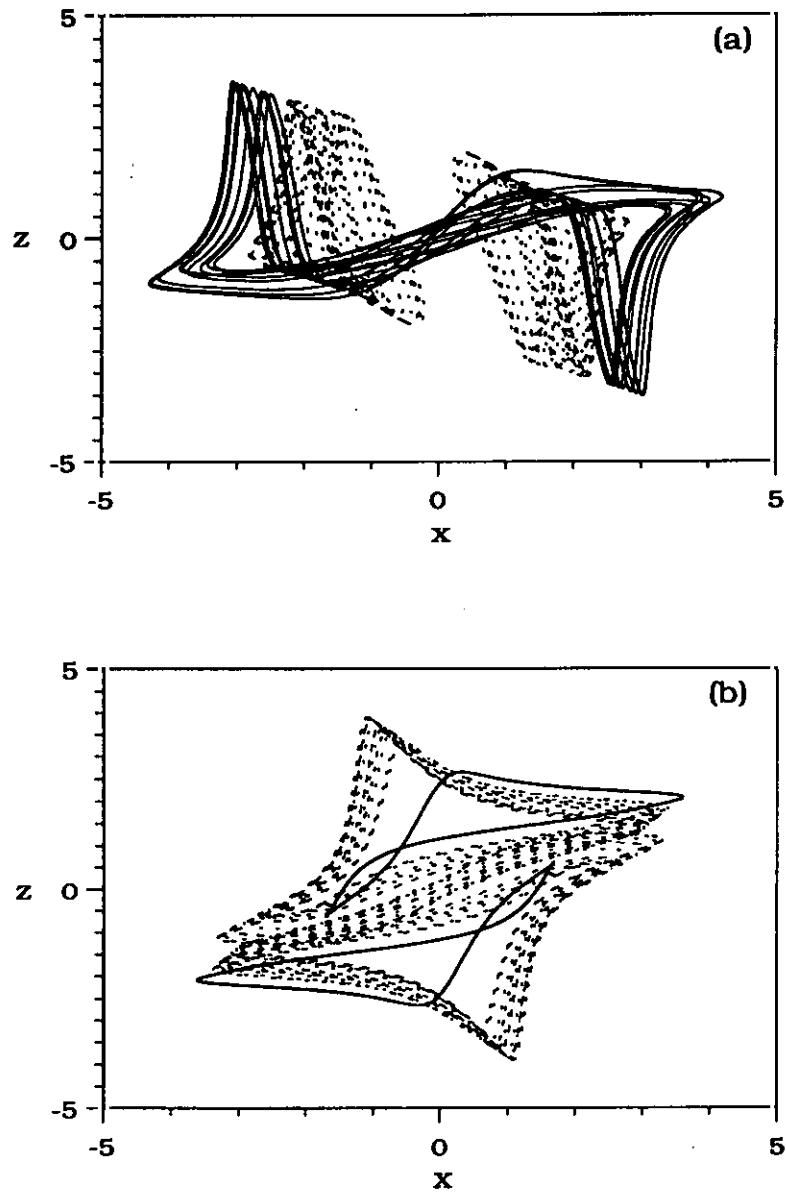




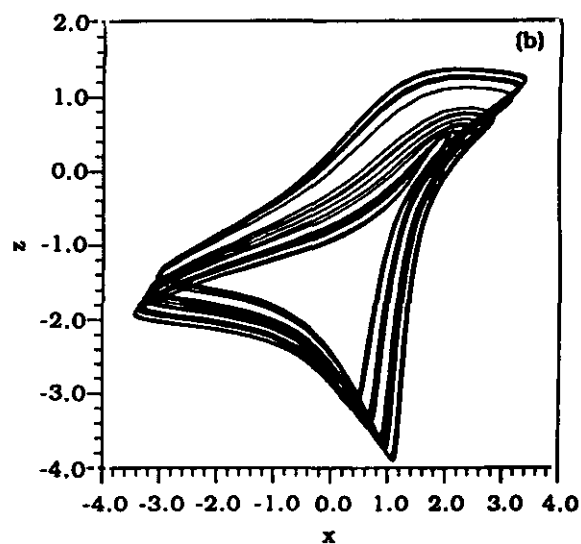
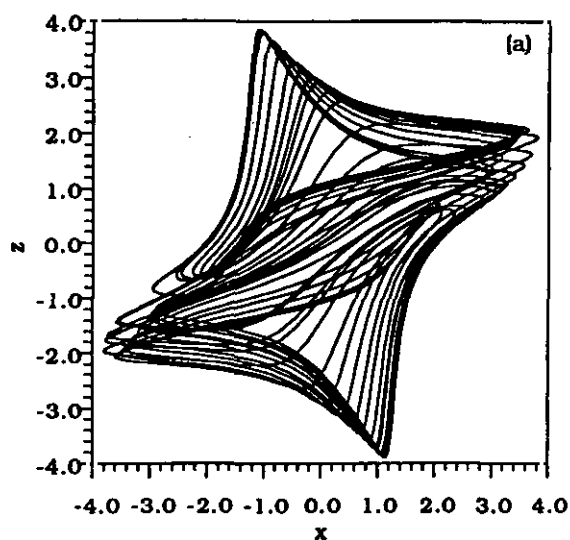
**Figura 1.3.** El acoplo de dos osciladores no lineales puede dar lugar al fenómeno de ajuste de frecuencias, consistente en que ambos se sincronizan a un periodo de oscilación común. Este fenómeno se ilustra en el caso del modelo (1.6) con los valores de los parámetros  $\varepsilon_1=1.0$ ,  $\varepsilon_2=2.0$ ,  $\alpha=\beta=0$  (paneles (a) y (b), osciladores independientes), y  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=0.25$  (ajuste de frecuencia, paneles (c) y (d)).



**Figura 1.4.** Diagrama de bifurcación que muestra la ruta al caos por doblado de período. Valores de los parámetros de control:  $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1.0$ ,  $\beta=-0.5$ ,  $\alpha$  perteneciente al intervalo  $[1.0, 1.7]$ .



**Figura 1.5.** (a) coexistencia de tres atractores caóticos, uno simétrico y dos asimétricos, para unos valores de los parámetros de control iguales a  $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1.0$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=-1.75$ . (b) coexistencia de cuatro atractores, dos caóticos y dos del tipo ciclo límite, para  $\varepsilon_1=1.0$ ,  $\varepsilon_2=2.0$ ,  $\alpha=1.0$ ,  $\beta=-0.75$ .



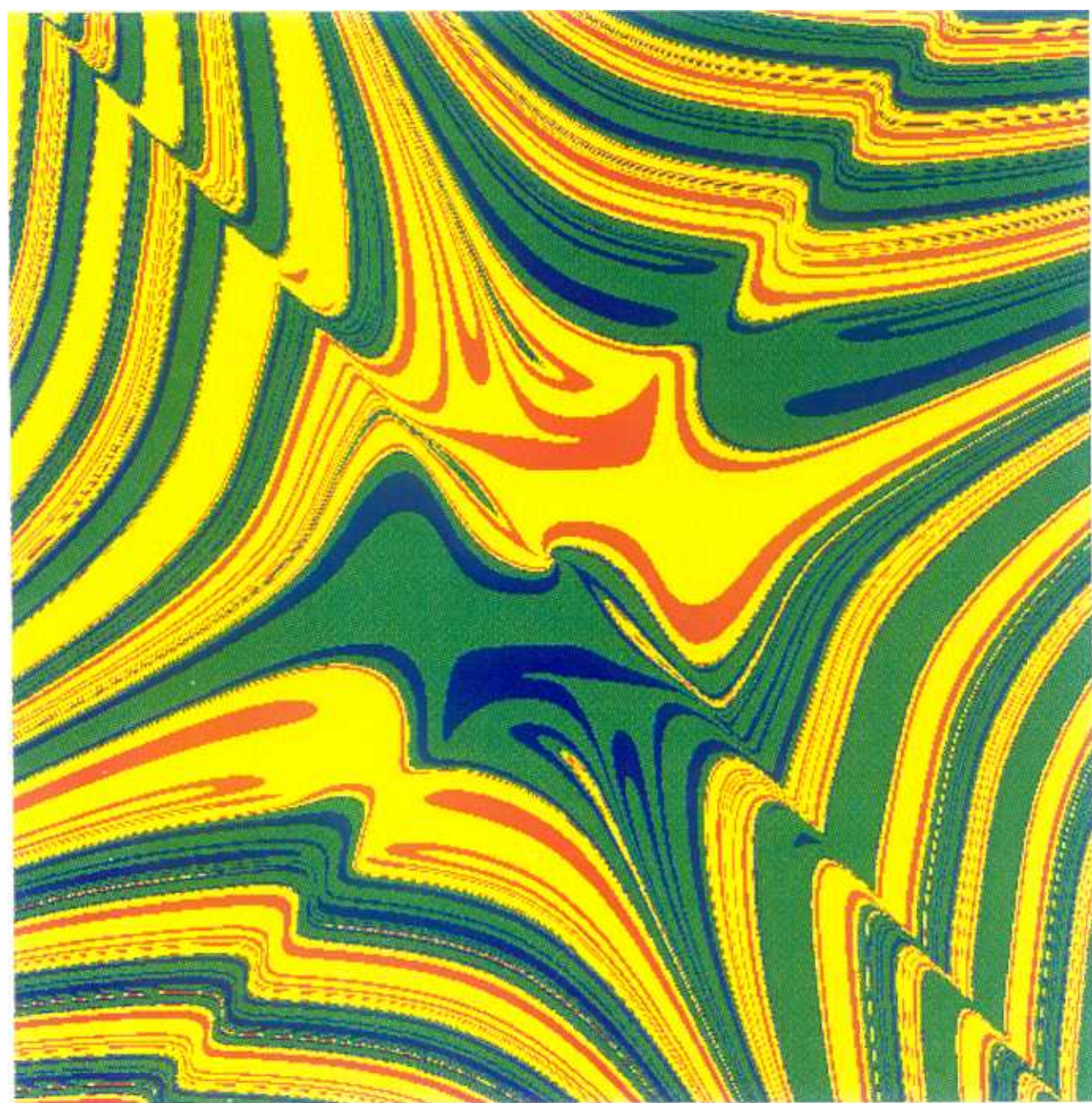
**Figura 1.6.** Ejemplo de bifurcación con ruptura espontánea de la simetría subyacente a las ecuaciones del modelo. En (a) los parámetros de control valen  $\varepsilon_1=1.0$ ,  $\varepsilon_2=2.0$ ,  $\alpha=0.96$ ,  $\beta=-0.75$ , y existe un único atractor simétrico caótico. En (b)  $\alpha=1.00$  (el resto de los parámetros iguales), y existen dos atractores caóticos cada uno de ellos asimétrico, pero que en conjunto restauran la simetría de las ecuaciones. Solamente se ha dibujado uno de ellos por razones de claridad.

**Panel 1.1.** Estructura de las cuencas de atracción de una sección del espacio de fases correspondiente al caso (a) de la figura 1.5. Las condiciones iniciales, del tipo  $(x,0,z,0)$ , se han coloreado según el atractor al que tienden bajo la evolución dinámica: en azul las correspondientes al atractor asimétrico con valor medio de  $x$  positivo, en rojo las que tienden al atractor asimétrico con  $\langle x \rangle < 0$ , y en verde las correspondientes al atractor simétrico.

**Panel 1.2.** Estructura de las cuencas de atracción de una sección del espacio de fases correspondiente al caso (b) de la figura 1.5. Las condiciones iniciales, del tipo  $(x,0,z,0)$ , se han coloreado según el atractor al que tienden bajo la evolución dinámica. Azul y rojo corresponden a condiciones iniciales que tienden respectivamente a los atractores caóticos asimétricos con  $\langle z \rangle > 0$  ( $\langle z \rangle < 0$ ), mientras que verde y amarillo corresponden a condiciones iniciales que tienden a los ciclos límites asimétricos. Obsérvese la riqueza de las estructuras que aparecen y el carácter fractal de alguna de las mismas.







## **1.2. El modelo de Lorenz-Haken y sus generalizaciones como paradigma teórico-experimental del caos temporal en láseres**

Desde los primeros tiempos del descubrimiento del efecto láser se sabe que las autooscilaciones regulares o irregulares forman parte integrante de la dinámica de prácticamente todos los sistemas láser. Por lo tanto es fácil comprender que si se pudieran explicar a partir de un modelo sencillo pero suficientemente general, nuestro conocimiento de estos fenómenos sería mucho más satisfactorio.

Es notable que en la física del láser exista un modelo tal, y que se haya logrado aproximarse en el laboratorio a sus condiciones de aplicabilidad. Las predicciones teóricas se han podido comparar con la experiencia, obteniéndose un acuerdo muy bueno.

Tal modelo es el conocido como modelo de Lorenz-Haken de la dinámica láser, cuyos rasgos más característicos vamos a describir de inmediato.

El láser descrito por dicho modelo es el más simple que cabe concebir: un láser de dos niveles, monomodo longitudinal y transversalmente, ensanchado homogéneamente, unidireccional y en aproximación de onda plana, o lo que es lo mismo, sin considerar la estructura espacial del haz láser. El modelo de Lorenz-Haken describe dicho láser mediante tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que determinan la evolución del campo eléctrico, la polarización macroscópica y la inversión de población. Si la emisión láser está sintonizada en el centro de la curva de ganancia del medio material y con una de las frecuencias propias de la cavidad resonante, entonces tanto el campo eléctrico como la polarización se pueden describir mediante variables reales, con lo que el modelo de Lorenz-Haken constará entonces efectivamente de tres ecuaciones diferenciales ordinarias reales; si la emisión láser no está sintonizada, entonces dichas magnitudes se describen mediante números complejos, lo que da lugar a cinco ecuaciones diferenciales reales.

Como veremos, el que el láser emita en resonancia o fuera de ella modifica notablemente las características dinámicas del mismo en aspectos tan importantes como el diagrama de bifurcaciones, la ruta al caos de las distintas variables o el comportamiento temporal de la fase. Por lo tanto, y siempre dentro del modelo Lorenz-Haken (L-H), se suele distinguir entre láseres en resonancia o fuera de ella, y sus respectivas descripciones reciben el nombre de modelo de Lorenz propiamente dicho, y modelo de Lorenz complejo.

Fue Hermann Haken en 1975 [Hak75] quien estableció el isomorfismo entre las ecuaciones que describen el modelo más simple de láser y las obtenidas por el meteorólogo E. Lorenz en 1963 [Lor63] en sus estudios sobre convección atmosférica. Por entonces (1975) ya se sabía que las ecuaciones de Lorenz presentaban



comportamientos altamente irregulares pero deterministas (uno de los primeros exponentes de lo que hoy se conoce como caos determinista), con lo cual la extensión de esta propiedad al caso de la física del láser fue inmediata. Así pues se predijo teóricamente que el modelo más simple de láser presentaría autooscilaciones irregulares o caóticas surgidas de su propia dinámica no lineal. Esta predicción era realmente notable por cuanto que las ecuaciones de Lorenz habían sido ya estudiadas con bastante detalle, y se podían predecir de forma analítica o numérica cuáles serían los umbrales de inestabilidad, la secuencia esperada de bifurcaciones al variar un parámetro de control, la forma del atractor extraño y algunas de sus propiedades estadísticas, etc. Por lo tanto existían predicciones bien definidas sobre lo que se debería observar en un láser descrito por este modelo.

Vamos a escribir a continuación la forma de las ecuaciones de Lorenz aplicadas a la convección atmosférica y al láser para que podamos ver con claridad el paralelismo entre ambas (véanse las referencias [Vil92] y [Tan91], a partir de las cuales estableceremos la notación en esta sección).

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(r - z) - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= -\kappa(1 + i\delta)E - \kappa AP \\ \dot{P} &= -\gamma_{\perp}(1 + i\Delta)P - \gamma_{\perp}ED \\ \dot{D} &= -\gamma_{\parallel}(D - 1) + \frac{\gamma_{\perp}}{2}(EP^* + E^*P) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Suponiendo sintonía perfecta ( $\delta = \Delta = 0$ ), (1.8) se transforma en

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= -\kappa E - \kappa AP = \kappa(-AP - E) \\ \dot{P} &= -\gamma_{\perp}P - \gamma_{\perp}ED \\ \dot{D} &= -\gamma_{\parallel}(D - 1) + \gamma_{\parallel}EP \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Si ahora cambiamos la variable independiente en (1.9) haciendo

$$\tau = \gamma_{\perp} t \quad (1.10)$$

obtendremos

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= \frac{dE}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\gamma_{\perp}} (\kappa(-AP - E)) = \frac{\kappa}{\gamma_{\perp}} (-AP - E) \\ \frac{dP}{d\tau} &= \frac{1}{\gamma_{\perp}} (-\gamma_{\perp} P - \gamma_{\perp} ED) = -P - ED \\ \frac{dD}{d\tau} &= -\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}} (D - 1 - EP) \end{aligned} \right\} \quad (1.11).$$

El isomorfismo completo entre el sistema de ecuaciones que describen el láser sintonizado (1.11) y las de Lorenz se consigue mediante las transformaciones

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}}} x \leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}}} E \\ P &= -\frac{1}{A} \sqrt{\frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}}} y \leftrightarrow y = -A \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}}} P \\ D &= 1 - \frac{z}{A} \leftrightarrow z = A(1 - D) \end{aligned} \quad (1.12)$$

y las identificaciones de parámetros

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \frac{\kappa}{\gamma_{\perp}} \\ r &\equiv A \\ b &\equiv \frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

, como es fácil comprobar mediante un cálculo directo.

Pronto se tuvo clara conciencia sin embargo de que las condiciones que debería cumplir un láser para poder ser descrito mediante el modelo anterior eran extraordinariamente difíciles de cumplir, no tan sólo por las aproximaciones drásticas impuestas (láser monomodo, unidireccional, homogéneamente ensanchado, etc), sino porque incluso dentro de los láseres que verifican estas restricciones las condiciones para observar la inestabilidad Lorenz-Haken implican trabajar con pérdidas altas y con bombeos muy superiores al del umbral para la obtención del efecto láser (primer umbral) ([Wei84b], [Abr85], [Ack85], [Wei88a], [Abr88], [Vil92]). En efecto, un análisis de la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio de (1.11) muestra que las condiciones umbral para que exista inestabilidad son

$$\kappa > \gamma_{\parallel} + \gamma_{\perp}$$

$$r \equiv A > \frac{(\kappa + \gamma_{//} + \gamma_{\perp})(\kappa + \gamma_{\perp})}{\gamma_{\perp}(\kappa - \gamma_{//} - \gamma_{\perp})} \quad (1.14)$$

. La primera de estas condiciones se conoce como la condición de "mala cavidad", mientras que la segunda implica que el umbral de inestabilidad está unas diez veces por encima del umbral láser. Como es lógico, justo la situación contraria se da en la mayoría de los láseres de uso habitual, ya que de lo que se trata en ellos es de minimizar las pérdidas (buena cavidad resonante) y conseguir efecto láser empleando la menor cantidad posible de energía de excitación. Así pues un láser que cumpliera los requerimientos del modelo de Lorenz no existía, y en algunos momentos pudo parecer incluso imposible de realizar. Estaba claro que si se quería verificar detalladamente el modelo de Lorenz-Haken tendría que fabricarse un láser diseñado *ex-profeso*.

En unos trabajos que datan de 1984, Weiss y Klische ([Wei84a], [Wei84b]) perfilan por vez primera las condiciones que debía reunir un láser real para poder observar en él la inestabilidad de Lorenz-Haken, decantándose por los láseres de infrarrojo lejano bombeados ópticamente mediante otros de CO<sub>2</sub> o N<sub>2</sub>O. Dos características hacen de estos láseres candidatos especialmente atractivos: por un lado las líneas de ganancia tan estrechas que poseen hacen que la condición de mala cavidad no suponga de hecho unas pérdidas excesivas, y por otro la ganancia se puede controlar muy bien variando la potencia óptica inyectada, con lo que la condición para la obtención del umbral de fluctuaciones (también llamado segundo umbral) está al alcance del experimento. Para compensar el ensanchamiento inhomogéneo producido por el proceso de bombeo óptico (desdoblamiento Stark AC) hay que trabajar a presiones relativamente altas, de forma que el ensanchamiento homogéneo debido a la presión sea más importante que el debido al bombeo. En [Wei84a] los autores citados logran ya obtener oscilaciones periódicas y una primera bifurcación por doblado de periodo al aumentar el bombeo en un láser de CH<sub>2</sub>F<sub>2</sub> que emite a 117  $\mu$ m.

Un poco más tarde, estos mismos autores presentan evidencia de que los láseres de infrarrojo lejano muestran autooscilaciones regulares y caóticas en el rango de parámetros predicho por el modelo de Lorenz-Haken, siguiendo una ruta al caos por doblado de periodo al incrementar la potencia de bombeo, o la inclinación de uno de los espejos del resonador ([Kli85], [Wei85]).

En [Sas87] Weiss y sus colaboradores estudian de nuevo un láser de infrarrojo lejano de NH<sub>3</sub> en dos de sus transiciones ópticas: una a 81 y otra a 374  $\mu$ m. Para la primera de ellas se cumplen muy bien las condiciones del modelo Lorenz-Haken, y en consecuencia la secuencia al caos observada coincide con la predicha por él. Resulta interesante observar que la secuencia o ruta al caos depende de una manera crítica de

que el láser esté sintonizado o no con el centro de la línea de ganancia. Si la sintonía es perfecta el segundo umbral (o umbral de inestabilidad de la emisión continua) lleva directamente a emisión caótica, mientras que fuera de sintonía la emisión comienza siendo periódica para terminar en caótica mediante una secuencia de doblados de periodo.

Esta diferencia entre el comportamiento del láser sintonizado o no sintonizado va a ser el objeto de una serie de trabajos, muy importantes a nuestro juicio, en los que se mide la evolución temporal tanto de la intensidad como del campo eléctrico, o lo que es lo mismo, de la intensidad y la fase.

Una de las razones para extender las observaciones también al campo eléctrico es que los experimentos de que hemos venido hablando fueron criticados por el hecho de que el bombeo óptico coherente (que implica tres niveles) parecía incompatible con las condiciones exigidas por el modelo L-H, que es un modelo de dos niveles. Los modelos de tres niveles bombeados coherentemente son más complicados, y difieren del estándar L-H en que predicen umbrales de inestabilidad más bajos, bifurcaciones supercríticas y atractores asimétricos periódicos o caóticos ([Wei88b], [Mol87], [Lag88]). En cuanto a este último punto, la simetría o asimetría de los atractores no se puede resolver midiendo únicamente la intensidad luminosa, ya que la diferencia consiste en el signo que toma el campo eléctrico en la evolución dinámica, y ese signo se elimina al tomar el cuadrado (energía o intensidad). Por lo tanto, para comprobar con detalle el modelo de Lorenz-Haken era necesario medir también la fase.

Uno de los primeros trabajos en esta línea es [Wei88b], en el que mediante una técnica heterodina que usa como frecuencia de referencia un armónico de un generador de microondas (klystron), se puede acceder al estudio de la evolución del campo eléctrico y su fase. Se comprobó que para el caso del láser en resonancia (sintonizado), los saltos de fase observados eran de  $\pm \pi$  radianes, lo que está de acuerdo con que el campo eléctrico (que es una variable real en este caso) efectúe un movimiento espiral alrededor de uno de los puntos fijos del modelo L-H, salte al punto de equilibrio simétricamente colocado con respecto al primero, gire en torno al mismo un cierto número de veces, vuelva al primero etc. Los saltos de fase ocurren, como era de esperar, cuando la intensidad es cero. Sin embargo, fuera de resonancia los saltos de fase son siempre menores que  $\pi$ , siendo este comportamiento compatible con las predicciones del modelo L-H cuando el campo y la polarización se tratan como variables complejas.

Otros trabajos relevantes en cuanto a la comparación de los resultados experimentales con las predicciones del modelo son [Hüb89], [Wei89], [Tan91] y [Tan92].

En [Hüb89] se ofrece una de las comparaciones más detalladas que hayan aparecido en la literatura entre las propiedades de los atractores caóticos de un modelo teórico y

las medidas de las mismas en un experimento. Debido a la extraordinaria estabilidad del sistema experimental utilizado los autores son capaces de obtener series temporales muy largas (25000 muestras típicamente) de la intensidad de un láser de infrarrojo lejano, con lo que pueden reconstruir los atractores subyacentes, calcular la dimensión fractal y la entropía de Kolmogorov de los mismos, así como las funciones de correlación temporal. El acuerdo entre las cantidades medidas y las calculadas mediante integración numérica de las ecuaciones del modelo es francamente excelente.

Los otros tres trabajos mencionados más arriba ([Wei89], [Tan91] y [Tan92]) se concentran sobre todo en el estudio experimental de la dinámica del campo eléctrico y de su fase, así como en la comparación de los resultados medidos con las predicciones del modelo L-H complejo (es decir, el que trata al campo y la polarización como variables complejas). Quizá el más completo de los tres sea [Tan91], que es el que pasamos a comentar brevemente.

El refinamiento experimental más importante introducido en este trabajo es el uso de otro láser de infrarrojo lejano como oscilador local, logrando así mucha mayor estabilidad y mayor relación señal/ruido. A la vez que se mide el campo eléctrico se mide también la intensidad luminosa en función del tiempo. Los resultados muestran que al variar el parámetro de sintonía desde valores grandes hacia valores bajos (es decir, desde tener el láser muy fuera de sintonía hasta sintonizarlo con el centro de la línea de ganancia), la energía experimenta una serie de doblados de periodo que termina en emisión caótica. La fase calculada a partir de los datos del campo eléctrico presenta una componente que varía linealmente con el tiempo, y superpuesta a ella oscilaciones regulares no armónicas cuyo periodo se va doblando al mismo tiempo que lo hace el de la energía. Este comportamiento tan regular deja de existir cuando entramos en el estado caótico. Entonces la fase ya no presenta esa tendencia regular lineal con el tiempo, y la evolución superpuesta es irregular.

En el caso del campo eléctrico, su vía al caos está menos clara a partir de los puros datos experimentales, aunque los presentados en el artículo sugieren que el campo es cuasiperiódico, y que su estructura de frecuencias se va haciendo más rica en cada nueva bifurcación de la energía. Los datos del campo eléctrico se presentan de manera que encajan dentro de la vía al caos tradicional mediante doblado de periodo, recurriendo a una rotación del sistema de referencia cuyo uso no está, a nuestro juicio, explicado o justificado con suficiente claridad.

Como es natural, la manera de comparar y presentar los resultados experimentales con los teóricos está muy influenciada por el análisis realizado en la literatura sobre la dinámica del campo eléctrico y la fase en las ecuaciones de Lorenz complejas. Veamos cuáles son a grandes rasgos los resultados y su interpretación. Nos vamos a concentrar en dos trabajos, [Zeg88] y [Vil90] que nos parecen relevantes en cuanto al problema de la fase. Ciertamente que no son los únicos, pero tienen la virtud de ser

recientes y estar escritos por autores directamente implicados en el estudio teórico o experimental de las inestabilidades láser en el marco del modelo L-H.

[Zeg88] recibe su más directo estímulo de resultados por entonces recientísimos ([Wei88b]) en los que se medía por primera vez la dinámica de la fase. Su análisis consiste en la integración numérica de las ecuaciones de Lorenz complejas, extrayendo de las mismas la evolución temporal del campo y la fase y comparándola con la del experimento. Uno de los resultados obtenidos en el análisis numérico es que el atractor correspondiente al campo eléctrico cuando la intensidad es periódica (de periodo cuatro en el ejemplo concreto del artículo) es cuasiperiódico con dos frecuencias básicas inconmensurables entre sí. Se introduce a continuación un sistema de referencia en rotación, con una frecuencia convenientemente escogida, en el que el campo eléctrico es periódico, y se afirma que este procedimiento se puede extender a todos los casos en que la energía es periódica, con lo que se obtiene una cierta "representación irreducible de la solución periódica para todas las variables, y no sólo para la intensidad".

En la misma línea de pensamiento sobre la dinámica de la fase está [Vil90]. El planteamiento de este artículo es muy general, de modo que puede abarcar una gama muy amplia de sistemas láser, que van desde el de dos niveles al de tres niveles bombeado ópticamente. Se introduce el estudio de la dinámica del láser no a través de la intensidad y la fase, sino a través de las dos cuadraturas del campo eléctrico (sus partes real e imaginaria), y en términos de estas variables se busca (como en [Zeg88]) un sistema en rotación que permita "congelar" el movimiento del campo eléctrico y lo haga aparecer periódico, de manera (y este punto es importante) que "las propiedades estructurales de los atractores así obtenidos varíen con continuidad al ir cambiando el parámetro de sintonía".

También nosotros hemos investigado la relación entre la dinámica del campo eléctrico y la intensidad, partiendo en primer lugar de un modelo ligeramente más general que el Lorenz-Haken estándar, que será discutido en detalle en el capítulo 4 de esta memoria. En el estudio de este modelo ya se apreciaba un acuerdo cualitativo muy notable entre los resultados numéricos y los experimentales, al mismo tiempo que se observaba que la ruta al caos del campo eléctrico no era el doblado de periodo, sino otra más sutil conocida por doblado de toro. La sorpresa ante la posibilidad de que en un modelo no trivial de un sistema como el láser puedan darse diferentes vías al caos para diferentes variables dinámicas nos ha animado a un análisis más profundo del modelo citado más arriba, y también al de las mismas ecuaciones de Lorenz complejas. Queríamos asegurarnos de que las propiedades observadas en el estudio numérico del modelo original eran también válidas para éste, que es el que se puede comparar más directamente con los experimentos realizados hasta la fecha.

Las conclusiones más importantes a las que hemos llegado se pueden resumir como sigue:

- 1) Las rutas al caos del campo eléctrico y la polarización por un lado, y de la inversión de población y la energía por otro, son distintas y coexistentes: en el primer caso se trata de la vía al caos por doblado de toro, mientras que en el segundo es por doblado de periodo.
- 2) Cuando la intensidad es periódica y aún no ha sufrido ninguna bifurcación de la cascada subarmónica, el espectro del campo eléctrico está formado por dos frecuencias base (generalmente irracionales entre sí) y combinaciones enteras de las mismas de la forma  $n(\nu_1 + \nu_2) + \nu_1$ ,  $n(\nu_1 + \nu_2) + \nu_2$ ,  $n=0,1,2,\dots$ . No aparecen otras combinaciones enteras mas que las señaladas. Cada vez que la intensidad sufre una bifurcación por doblado de periodo, se añaden al espectro del campo dos nuevos picos de frecuencia ( $f_1$  y  $f_2$ ) y sus combinaciones de la forma  $m(f_1 + f_2) + f_1$ ,  $m(f_1 + f_2) + f_2$ ,  $m=1,2,3,\dots$ ; además  $f_1$  y  $f_2$  no toman valores cualesquiera, sino que están relacionadas racionalmente con las dos frecuencias base del campo eléctrico justo antes de ocurrir la bifurcación según una fórmula muy precisa. En concreto se cumple que

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= (\nu_2 - \nu_1) / 2 \\ f_2 &= \nu_1 + (\nu_2 + \nu_1) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

. Tras una adecuada renormalización de las frecuencias de base, las mismas leyes enunciadas para la primera bifurcación se cumplen para todas las siguientes. Los comportamientos descritos se cumplen para un rango de parámetros de control muy amplio, lo que sugiere que el mecanismo de doblado de toro-doblado de periodo es muy general en las ecuaciones de Lorenz complejas.

- 3) Es posible justificar los puntos (1) y (2) mediante un tipo de soluciones formales consistentes en desarrollos en series infinitas. Decimos formales porque la convergencia de las mismas no se ha podido establecer de manera rigurosa. Sin embargo, la combinación de la evidencia numérica y de la existencia de dichas soluciones formales parece indicar que lo son de hecho en sentido estricto, al menos para un cierto rango de los valores de los parámetros de control.

- 4) Las ecuaciones de Lorenz complejas admiten un grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones de simetría, lo que permite clarificar la introducción de sistemas de referencia en rotación en los cuales el campo sea estrictamente periódico, como apuntaban [Zeg88] y [Vil90]. Este grupo de simetría se puede generalizar para incluir las ecuaciones de Maxwell-Bloch completas (nos referimos a las ecuaciones en derivadas parciales de las cuales derivan todos estos modelos más simples). Desde este punto de vista, la relación entre ambas vías al caos es característica de una clase muy amplia de sistemas láser. Se trata pues de un caso de anholonomía de la fase que

surge como consecuencia de la dinámica, aspecto éste desarrollado en [Nin92a-b] y [Rol93] para el caso de las ecuaciones de Lorenz complejas. Los detalles sobre estas investigaciones se presentarán en el capítulo 4.

Tras la discusión del modelo más simple de láser, y de su realización experimental, quisiéramos discutir otro estrechamente relacionado con el primero y que en la práctica ha llevado también a detallados estudios experimentales y a comparaciones con la teoría: se trata del láser monomodo, homogéneamente ensanchado, de tres niveles y bombeado ópticamente. La diferencia fundamental con el modelo L-H es el efecto no despreciable del bombeo óptico coherente en un sistema de tres niveles. Los experimentos más exitosos sobre este tipo de dispositivos se han llevado a cabo en láseres de infrarrojo medio ( $\lambda \approx 10\text{-}15\ \mu\text{m}$ ) bombeados usualmente mediante uno de  $\text{CO}_2$ . Estos láseres presentan usualmente umbrales de inestabilidad más bajos que los que se necesitaban para observar el caos del tipo L-H, e incluso pueden generar autooscilaciones (periódicas o caóticas) *violando* la condición de mala cavidad. Además, al ser usados con frecuencia para obtener radiación coherente en una amplia gama de longitudes de onda del infrarrojo, su importancia práctica es mayor que la de los láseres contruidos expresamente para observar el caos L-H. Todo ello abunda en la idea de que las inestabilidades son comunes en todo tipo de láseres, y en concreto también en los de aplicación práctica, de lo que se deduce que un estudio de tales fenómenos no tiene únicamente interés desde el punto de vista de la física fundamental, sino también de la aplicada.

Algunas referencias importantes sobre el estudio experimental de los láseres de infrarrojo medio de tres niveles son [Har85a], [Bis85a], [Har85b], [Bis85b] y [Har85c]. El centro de atención de las mismas es un láser que usa  $\text{NH}_3$  como molécula activa, bombeado con un TEA (atmosférico de excitación transversal) de  $\text{CO}_2$ . El láser de bombeo se controla cuidadosamente en cuanto a su composición modal transversal y axial, de manera que se obtengan pulsos limpios (sin batidos o fluctuaciones). Al trabajar a presiones dos o tres órdenes de magnitud superiores a las de los láseres de infrarrojo lejano el ensanchamiento es fundamentalmente homogéneo, y se puede conseguir fácilmente que funcionen en régimen monomodo haciendo la longitud de la cavidad resonante suficientemente pequeña (de unos 20 ó 30 cms), de manera que sólo coincida un modo axial del resonador dentro de la curva de ganancia del medio activo.

En la primera de las referencias antes citadas ([Har85a]) la duración del pulso de bombeo era de 100 ns, con una potencia de pico de 3 Mw. En el resto se cambia el láser de bombeo por un híbrido TEA-sección de baja presión ( $\text{CO}_2$ ) con el objeto de obtener pulsos mucho más largos (2  $\mu\text{s}$ ) y de esta forma trabajar en condiciones más próximas a bombeo estacionario, lo que simplifica la interpretación de los resultados.



Centrándonos en el montaje descrito en [Bis85a] (que es, con ligeras modificaciones, el mismo que en [Har85b], [Bis85b] y [Har85c]) los principales hallazgos son la existencia de una secuencia de bifurcaciones por doblado de periodo (y en algunos casos por intermitencia) al sintonizar finamente la longitud del resonador, que sería en este caso el parámetro de control.

Estos láseres poseen umbrales de inestabilidad menores que los de infrarrojo lejano, e incluso pueden dar lugar a emisión caótica violando la condición de mala cavidad, como se señaló más arriba. Todo ello implica que las fluctuaciones en este caso sean mucho más fáciles de observar, pero que también haya que complicar los modelos teóricos que dan cuenta de las mismas, aunque permaneciendo dentro del marco de las ecuaciones de Maxwell-Bloch.

Trabajos posteriores de Harrison y colaboradores han contribuido a clarificar tanto los mecanismos físicos que dan lugar a las autooscilaciones de los láseres de infrarrojo medio, como también a un análisis detallado de modelos específicos de los mismos ([Meh86], [Mol87], [Mol89], [Lu91]).

Las consecuencias más importantes de pasar de un esquema de dos niveles a otro de tres en la descripción de los láseres son las siguientes: acercamiento del segundo umbral láser (o umbral de fluctuaciones) al primero (umbral para la obtención del efecto láser propiamente dicho), posibilidad de obtener oscilaciones caóticas tanto en condiciones de buena como de mala cavidad y secuencias de bifurcaciones diferentes y más complejas que las predichas por el modelo Lorenz-Haken.

A pesar de las diferencias señaladas, se dan también algunas similitudes muy notables, que apuntan, a nuestro parecer, a propiedades comunes de una clase muy amplia de modelos teóricos de los láseres derivados de las ecuaciones generales de Maxwell-Bloch (véase el capítulo 4 de esta memoria). Nos estamos refiriendo concretamente al problema de la fase como nueva variable dinámica en los casos en que no existe sintonía. Examinando por ejemplo [Lu91] vemos que se dice claramente que el campo eléctrico tiene un comportamiento cuasiperiódico con dos frecuencias irracionales entre sí, mientras que la energía es periódica. Dicho comportamiento cuasiperiódico se hace aparentemente más complejo a medida que la energía se va bifurcando por sucesivos doblados de periodo, siguiendo un esquema análogo a lo que ocurriría con el comportamiento del modelo L-H, para el cual se dispone hoy día de medidas muy precisas que confirman estos detalles.

Podemos concluir este epígrafe diciendo que el modelo teórico más simple de láser ha sido confirmado experimentalmente con un alto grado de precisión, tanto en sus predicciones cualitativas como cuantitativas, y que otros ligeramente más complicados han encontrado también su correlato experimental en los láseres moleculares bombeados ópticamente. En ambos casos, si se tiene en cuenta la posible falta de sintonía entre la emisión láser y el centro de la línea de ganancia o con respecto a las

resonancias de la cavidad, la fase es una variable dinámica en un mismo plano de igualdad con la intensidad. En ambos tipos de modelos, la evidencia numérica y experimental indica que las vías al caos que siguen el campo eléctrico y la intensidad son diferentes, siendo la del primero un doblado de toro, y la de la segunda por doblado de periodo. Un análisis de las sucesivas bifurcaciones del campo y la intensidad ha descubierto relaciones sutiles entre dos vías al caos que parecían bastante distintas entre sí, y que en esta ocasión coexisten. Estas relaciones, presentes en modelos muy diversos, apuntan a que dependen tan sólo de algunas propiedades formales muy generales de las ecuaciones de Maxwell-Bloch, y que las heredan todos los modelos que respetan la estructura básica de dichas ecuaciones.

### **1.3. Fenomenología temporal compleja en láseres modulados externamente, inhomogéneamente ensanchados o multimodo**

En comparación con el epígrafe anterior, éste es de contenido más heterogéneo, en tanto que trata de resumir la gran cantidad de evidencia experimental sobre inestabilidades y caos en láseres más complicados que los descritos por el modelo Lorenz-Haken.

Discutiremos con cierto detalle los estudios llevados a cabo en láseres cuyos parámetros (pérdidas, ganancia, longitud del resonador, etc) se modulan externamente, puesto que la caracterización experimental de los mismos es a la vez muy completa y de relativamente fácil interpretación, y porque además fue así como se descubrió la primera ruta al caos en condiciones controladas en tales sistemas ópticos.

Un nivel mayor de complejidad presentan los láseres que aun siendo monomodo poseen un ensanchamiento inhomogéneo de su perfil de ganancia (típico en muchos láseres de gas que trabajan a baja presión). Los experimentos llevados a cabo en estos sistemas muestran sin embargo rutas al caos bien definidas, pero con umbrales de inestabilidad mucho más bajos que en el caso de ensanchamiento homogéneo. El tratamiento teórico (o numérico) de estos láseres es complicado, puesto que hay que considerar una gran cantidad de grupos atómicos o moleculares cada uno de ellos interaccionando selectivamente con la radiación. Sólo recientemente han alcanzado los esquemas numéricos y la potencia de los ordenadores el grado necesario para poder establecer comparaciones cuantitativas con la experiencia.

También discutiremos algunos experimentos relevantes sobre inestabilidades en sistemas multimodo (axial o transversal), centrándonos en láseres de colorante y gas ( $\text{CO}_2$ ) puesto que nos son más familiares por nuestras investigaciones. Particularmente notable es a nuestro entender el hecho de que se haya podido, en

algunos casos, caracterizar cuantitativamente la dinámica de láseres de colorantes en los que muchas veces pueden intervenir miles de modos acoplados.

Por último, intentando una exhaustividad tal vez imposible, veremos algunos experimentos en los que se estudian inestabilidades y rutas al caos en láseres de estado sólido.

Vamos a agrupar el material en tres subapartados: láseres de gas, láseres de colorantes y láseres de estado sólido. En alguno de ellos (como en el de los láseres de gas) encontraremos ejemplos de láseres modulados, láseres inhomogéneamente ensanchados o multimodo, mientras que en otros (láseres de colorantes) los ejemplos corresponden casi exclusivamente a láseres multimodo.

### **1.3.1. Inestabilidades y caos en láseres de gas**

[Are82] es la primera referencia en la literatura en la que de manera muy estrictamente controlada se estudia la vía al caos de un láser con modulación externa de las pérdidas. El láser de  $\text{CO}_2$  utilizado por los autores se puede modelar bien por las ecuaciones semiclásicas de Maxwell-Bloch en las que se ha eliminado adiabáticamente la polarización. En tal caso tendríamos tan sólo dos ecuaciones acopladas para la intensidad luminosa y la inversión de población, siendo necesaria la modulación externa de algún parámetro de control para tener un sistema en el que pueda existir caos. La amplitud de la modulación es más bien pequeña (del orden del 1%) y fija, usándose como parámetro de control la frecuencia de la misma. Se observa una ruta al caos por doblado de periodo y el fenómeno de multiestabilidad generalizada, esto es, la coexistencia para determinados valores del parámetro de control de varios atractores asintóticos estables. Los autores sugieren que este hecho puede explicar la aparición de divergencias tipo  $f^\alpha$  en el espectro de Fourier cuando los atractores asintóticos a que nos referíamos más arriba son caóticos, y presentan evidencia en este sentido.

Con el mismo sistema experimental, los autores de [Puc85] mejoran la estabilidad del láser y del generador de frecuencias que modula las pérdidas, de manera que se pueden observar de forma estable y controlada ventanas de periodicidad  $f/8$  e incluso  $f/10$  ( $f$  es la frecuencia de modulación) dentro de la región caótica. A diferencia del caso anterior, la frecuencia de modulación se mantiene ahora fija, y se varía su amplitud entre un 1% y un 2%. Se toman series temporales muy largas (32000 muestras, lo que corresponde a 16 por cada periodo de la señal de modulación), lo que permite la aplicación del algoritmo de Grassberger-Procaccia para el cálculo de la dimensión fractal del atractor del láser (para una discusión del fundamento y aplicación de dicho algoritmo, ver la sección 2.3.3 de esta memoria). El resultado más notable es que en el punto de acumulación de la cascada subarmónica se obtiene para dicha dimensión un valor de 1.5, que está de acuerdo con los cálculos realizados a partir de la ecuación

logística. Cuando el láser entra en el estado caótico completamente desarrollado, la dimensión fractal del atractor se incrementa abruptamente hasta un valor del orden de 2.4.

En la misma línea que los experimentos anteriores están [Bis87] y [Dan87], en este último si cabe con un estudio aún más detallado del comportamiento de un láser de  $\text{CO}_2$  provisto de un modulador elastoóptico. La caracterización experimental de la multiestabilidad y la aparición de crisis en el sistema (cambios globales y súbitos del tamaño o la topología del atractor extraño, usualmente por colisión del mismo con un ciclo límite inestable) es probablemente lo más novedoso. Comparan sus resultados con las ecuaciones de Maxwell-Bloch con eliminación adiabática de la polarización y modulación de un parámetro de control, y encuentran un acuerdo satisfactorio con el experimento.

La generación de inestabilidades y caos en láseres en los que se elimina adiabáticamente la polarización puede lograrse también de otras formas distintas del forzado externo de alguno de sus parámetros de control. Así, en [Are86], [Are87] y [Are88] se propone y estudia un sistema de inestabilización mediante retroalimentación de las pérdidas con una señal obtenida a partir de la intensidad del láser. En este caso el considerar la dinámica de la variable de retroalimentación es lo que proporciona el grado de libertad adicional para poder observar autooscilaciones caóticas.

Dentro del campo de las inestabilidades en láseres monomodo, las correspondientes a ensanchamiento inhomogéneo ocupan un lugar destacado por su complejidad. En efecto, una descripción medianamente realista de estos láseres implica considerar una gran cantidad de grupos de átomos o moléculas interaccionando selectivamente con el campo de radiación.

Experimentalmente se sabe, gracias al trabajo pionero de L. Casperson (véase [Cas80] y las referencias incluidas en el mismo), que la emisión continua de un láser inhomogéneamente ensanchado de Xe puede desestabilizarse dando lugar a oscilaciones periódicas no amortiguadas. En posteriores artículos este mismo autor contribuyó a una clarificación del mecanismo causante de la inestabilidad, producida por la existencia de varias frecuencias correspondientes a una longitud de onda dada en el resonador (dispersión anómala), y por el hecho de que estas bandas de frecuencia pueden ser amplificadas a costa de la inversión de población del láser ([Cas80], [Cas81], [Cas88a] y [Cas88b]). Otros experimentos dignos de mención en láseres inhomogéneamente ensanchados son [Mae82], [Alb85] y [Tar86], siendo esta última referencia la más detallada en cuanto al control del experimento y a la comparación con un modelo teórico. El sistema heterodino empleado en [Tar86] permite el seguimiento de la evolución temporal de la intensidad, de la del campo eléctrico y establecer la forma (simétrica o asimétrica) de los atractores en el espacio fásico. Del

estudio del modelo teórico, los autores de [Tar86] sacan la conclusión de que la fase es otra variable dinámica más, junto con la intensidad y la inversión de población, situación que nos recuerda por otra parte a lo que ocurría en el modelo Lorenz-Haken cuando se consideraba la desintonía.

Son interesantes sus comentarios acerca de las similitudes cualitativas entre el comportamiento dinámico de la fase en láseres homogénea e inhomogéneamente ensanchados, a pesar de que pueden diferir notablemente en características tales como los umbrales de inestabilidad, el número de ecuaciones necesarias para modelarlos, etc. En la misma línea (aunque tal vez no de una manera tan consciente) está un trabajo reciente relacionado con modelos simples aplicables a láseres inhomogéneamente ensanchados ([Mez92]). En él se ve claramente de nuevo que las rutas al caos del campo eléctrico y la intensidad son diferentes, la segunda por vía del doblado de periodo y la primera muy probablemente por doblado de toro (aunque en la referencia citada no hay información suficiente para afirmarlo categóricamente).

Nuestra explicación de la similitud cualitativa de estos comportamientos del campo eléctrico y la intensidad en clases muy distintas de láseres es que todos los modelos considerados derivan, bajo aproximaciones más o menos drásticas, de las ecuaciones de Maxwell-Bloch, respetando (y esto es crucial) la forma funcional de los segundos miembros de dichas ecuaciones. En particular, los términos no lineales aparecen en la ecuación de la polarización (término tipo  $FD$ ) y en la de la inversión de población (término  $F^*P+cc$ ). Pues bien, la clase entera de modelos derivados de las ecuaciones de Maxwell-Bloch admite soluciones temporales formales dadas por series del tipo

$$\left. \begin{aligned} F &= e^{i\eta t} \sum_n f_n e^{in\Omega t}; n \in \mathbb{Z}, f_n \in \mathbb{C} \\ P &= e^{i\eta t} \sum_n \pi_n e^{in\Omega t}; n \in \mathbb{Z}, \pi_n \in \mathbb{C} \\ D &= \sum_n d_n e^{in\Omega t}; n \in \mathbb{Z}, d_n = d_{-n}^* \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

y son invariantes bajo el mismo grupo gauge discutido en relación con el modelo de Lorenz-Haken.

Desde este punto de vista, muy formal y por lo tanto no del todo riguroso al no haber comprobado la convergencia de las series del tipo (1.16), es fácil comprender que la relación discutida entre las vías al caos del campo y la energía debe observarse en todos los modelos antes citados.

El que los investigadores se hayan concentrado hasta hace relativamente poco en las inestabilidades monomodo tiene su explicación o justificación en la mayor simplicidad de las mismas, y en que los experimentos son entonces más sencillos de controlar y de interpretar. Sin embargo existen referencias en la literatura en las que se estudian

inestabilidades multimodo con un nivel de control experimental que no deja nada que desear con respecto a las correspondientes a láseres monomodo. Vamos a presentar cuatro ejemplos, aunque somos conscientes de que existen muchos más que con parecidos derechos podrían aparecer aquí referidos. Se trata de [Wei83], [Bis85c] y [Bis88].

En [Wei83] la causa de las inestabilidades en un láser de He-Ne a  $3.39\text{ }\mu\text{m}$  es la interacción de tres modos longitudinales, observándose caos según las tres rutas clásicas (doblado de periodo, Ruelle-Takens e intermitencia). La selección de una u otra ruta se consigue desintonizando el láser una determinada cantidad con respecto al centro de la línea de ganancia, y luego usando la inclinación del espejo de salida como parámetro de control.

En [Bis85c] y [Bis88] se estudia un láser continuo de  $\text{CO}_2$ , monomodo axialmente, y con una composición transversal de modos que se puede controlar mediante la introducción de un iris intracavidad de diámetro variable. Cuando están presentes dos modos transversales el batido entre los mismos da lugar a oscilaciones periódicas no amortiguadas, que se desestabilizan y dan lugar a caos cuando se añade un nuevo modo transversal (vía Ruelle-Takens); se han observado también doblado de periodo y sincronización de frecuencias inconmensurables en la vía al caos de este sistema.

### **1.3.2. Inestabilidades y caos en láseres de colorantes**

Una motivación importante para el estudio de las fluctuaciones en láseres de colorantes ha sido establecer los límites de sensibilidad de una técnica analítica: la espectroscopía intracavidad. Consiste en detectar la presencia y concentración de una determinada sustancia colocándola en el interior de la cavidad resonante de un láser de colorantes de espectro ancho, observando las líneas de absorción producidas en la interacción de la radiación láser con dicha sustancia. La gran coherencia del láser debería permitir la medición de detalles muy finos del espectro de absorción, así como la detección de cantidades ínfimas de las sustancias objeto de estudio, como de hecho ocurre. Sin embargo existía una discrepancia entre los límites teóricos de sensibilidad de la técnica y la realmente obtenida en la práctica, que podía oscilar entre uno o dos órdenes de magnitud. Además la discrepancia no se eliminaba ni siquiera en el caso en que las fuentes de ruido "técnico" (vibraciones, imperfecciones mecánicas u ópticas, derivas térmicas, etc) se sometían a un control riguroso. Por lo tanto, el origen de la misma había que buscarlo en la dinámica del propio láser. Algunos de los trabajos más relevantes en relación con estos problemas son [Bae78], [Bae80a], [Bae80b], [Mir82b], [Atm85], [Sto85], [Aiv86a], [Aiv86b] y [Aiv87].

La principal conclusión que se desprende de los mismos es que la sensibilidad de la espectroscopía intracavidad se ve limitada por el tiempo característico asociado a las

fluctuaciones temporales en los modos resonantes. Incluso en condiciones en que la intensidad *total* del láser apenas fluctúa, la de los modos individuales presenta variaciones irregulares muy importantes, llegando a ser incluso del 100%. El origen de dichas fluctuaciones es dinámico, es decir, surgen del mismo funcionamiento del láser incluso si se extreman los cuidados y se controlan factores externos tales como vibraciones mecánicas, inestabilidades de las fuentes de alimentación (o de los láseres de bombeo), derivas térmicas y otros; sin embargo el mecanismo preciso que las explicaría no queda aclarado en las referencias anteriores en las que, todo lo más, se esbozan algunos modelos de ecuaciones de balance suplementadas con fuentes de ruido aleatorio que modelarían los procesos estocásticos asociados a la emisión espontánea de radiación, y su posterior evolución temporal en un medio activo.

Las aplicaciones potenciales de las fuentes coherentes de radiación de banda ancha en los procesos ópticos no lineales ha despertado también el interés por el estudio de las fluctuaciones que aparecen en tales láseres, como en el caso de [Wes84]. En esta referencia se hace un análisis estadístico del acoplo de los modos individuales presentes en la emisión de un láser de colorantes, bombeado por un Yag-Nd doblado en frecuencia. Se prueba que el espectro de emisión cambia, aparentemente de forma aleatoria, de disparo a disparo y que existe correlación positiva entre modos separados por uno o dos rangos espectrales libres. Esta última observación se explica por el hecho de que el láser tiende a emitir la máxima intensidad compatible con la inversión de población existente. Al ser el láser investigado uno de configuración tipo Fabry-Pérot esto implica que son necesarios varios modos (al menos dos) para aprovechar de manera eficiente la ganancia, lo cual a su vez está relacionado con el fenómeno conocido como quemado espacial de huecos. Este fenómeno consiste en que el campo electromagnético estacionario de un resonador Fabry-Pérot aprovecha con la máxima eficiencia la ganancia que proporciona el medio activo sólo en unas zonas muy concretas de éste. Para extraer la máxima potencia del láser será necesario por tanto que varios modos del resonador se repartan el volumen activo del mismo.

La dinámica de los láseres de colorantes ha despertado un notable interés *per se*, independientemente de las posibles aplicaciones prácticas, sobre todo desde el momento en que las ideas sobre el origen dinámico determinista de una amplia clase de fenómenos irregulares han madurado y se han convertido en motivo no solo de especulación teórica, sino también de comprobación experimental. Difícilmente se podría haber elegido un sistema más atractivo que el láser de colorantes por la riqueza de comportamientos que presenta, ni de más difícil tratamiento analítico, por el enorme número de grados de libertad implicados. En efecto, la gran anchura de banda de la curva de ganancia de muchas sustancias orgánicas usadas como medio activo hace que en condiciones normales (sin elementos selectores o dispersores intracavidad) experimenten ganancia óptica cientos en incluso miles de modos

longitudinales del resonador, y asimismo numerosos modos transversales, dependiendo de los parámetros geométricos del resonador.

Parece superfluo decir que la interrelación entre las dinámicas de esos "modos" individuales (axiales o transversales) para producir los patrones espaciales y temporales observados en la práctica no se comprende aun de manera satisfactoria, y que es actualmente un campo abierto de investigación. Y sin embargo, es notable que a pesar de esta enorme complejidad haya varios experimentos que muestran que la dinámica de estos láseres se puede entender como proveniente de un sistema dinámico con un número pequeño de grados de libertad. Vamos a repasar brevemente algunos de los trabajos en dicha línea, en concreto [Hil84], [Hil85], [Atm86], [Zhe86], [Atm87], [McM88] y [Fu90].

En [Hil84] y [Hil85] (este último de corte teórico y motivado por las medidas del primero) se muestra como al aumentar la potencia de bombeo del láser de  $\text{Ar}^+$  que excita al de colorante, la intensidad integrada de este último sufre una serie de cambios bruscos o bifurcaciones, acompañadas de histéresis. La observación simultánea del espectro del láser (con resolución de los modos individuales) permite concluir que tales bifurcaciones están asociadas al cambio de emisión del láser desde el centro de la línea de ganancia a una emisión bicromática, con separación de frecuencia igual a la de Rabi. Para potencias de bombeo aún más altas hay evidencia indirecta de que el láser puede llegar a un estado caótico, pero no hay información detallada que nos permita confirmar este extremo, ni podemos saber tampoco que ruta seguiría la evolución temporal ordenada a la desordenada. El láser estudiado por los autores es uno en configuración de anillo, con lo cual pueden obtener emisión en un modo transversal esencialmente (el  $\text{TEM}_{00}$ ) y también en un único modo axial cuando la potencia de bombeo es baja.

[Atm86] y [Atm87] representan un intento de aplicación de los métodos numéricos que estiman la dimensión de correlación y la entropía de Kolmogorov al análisis de las señales temporales obtenidas de un láser de colorantes continuo, y de explicación de los resultados mediante un mecanismo que accopla de manera efectiva los modos individuales (dispersión Brillouin).

El parámetro de control del experimento es la potencia espectral intracavidad (esencialmente la potencia inyectada dividida por el ancho de banda). Al medir la evolución temporal de grupos de modos (unos 35 por grupo debido al límite impuesto por la resolución del espectrómetro) se observa que el tiempo de correlación asociado a las fluctuaciones disminuye de manera discontinua y brusca para ciertos valores de la potencia espectral. También varían de forma discontinua la dimensión de correlación y la entropía de Kolmogorov calculadas usando el algoritmo de Grassberger-Procaccia. Los valores fraccionarios y relativamente pequeños obtenidos para la dimensión de correlación confirman que estamos ante un caso de caos determinista. Sin embargo, la



posible ruta al caos o las razones para estos cambios discontinuos de las magnitudes antes citadas no se investigan en detalle.

El intento de explicación propuesto en [Atm87] se puede decir que tiene éxito solo en parte, ya que si bien el mecanismo aducido puede acoplar muchos modos cuando los valores de la potencia espectral son muy altos, no es muy efectivo para valores moderados o pequeños de dicha cantidad (que es el caso del experimento).

El problema que se está planteando aquí es, por supuesto, justificar porqué un sistema en el que pueden excitarse varios miles de modos simultáneamente se comporta como regido por un modelo mucho más sencillo, con tan sólo unos pocos grados de libertad. De ahí que los autores busquen un mecanismo que acople y organice la dinámica de gran cantidad de modos (que actuarían coherentemente) para después describir la evolución temporal de un reducido grupo de estas, llamémoslas así, superestructuras.

[McM88] es otra referencia en la que se trata el comportamiento de los láseres de colorantes multimodo desde la perspectiva de la teoría de los sistemas dinámicos.

En su experimento el láser continuo de colorantes experimenta cambios bruscos en su espectro óptico de emisión al variar la potencia de bombeo. Así, partiendo de un espectro en el que aparecen solo tres modos con sus amplitudes fijas se pasa a otro que contiene cientos de picos de frecuencia, cuyas amplitudes fluctúan violentamente (modulación del 100%). Se muestra experimentalmente que el tiempo de correlación característico de los modos disminuye al aumentar el bombeo externo. En todas las medidas se aseguran que la emisión del láser se produce en el modo transversal fundamental  $TEM_{00}$ , siendo ésta una condición imprescindible para observar los espectros sencillos de los que hablábamos más arriba.

El análisis numérico de las series temporales digitalizadas correspondientes a la intensidad modal revela, al usar el algoritmo de Grassberger-Procaccia, que el comportamiento irregular observado se puede explicar mediante un sistema dinámico determinista de pocos grados de libertad, ya que la dimensión de correlación resulta finita y fraccionaria ( $\approx 1.6$ ), y la entropía de Kolmogorov positiva.

Los resultados de un modelo de amplitudes modales acopladas por interacciones de tercer orden ofrecen un buen acuerdo cualitativo con el experimento, sin necesidad de introducir en el mismo fuentes de ruido externas. Así pues la dinámica determinista del modelo considerado genera oscilaciones irregulares como las que se observan en la realidad.

Entre las referencias teóricas recientes que abordan el problema de la modelización de los láseres de colorantes podemos citar [Fu90], donde se estudian soluciones oscilantes en forma de onda viajera, considerando que el nivel láser inferior no es discreto, sino un continuo (una banda de estados). Se predicen umbrales de inestabilidad mucho más bajos que los estimados por los modelos más simples, lo que

está en pleno acuerdo con la experiencia, según la cual muchas veces ocurre que las fluctuaciones aparecen juntamente con la emisión láser.

Nuestros propios trabajos abundan en mostrar que el caos determinista puede explicar en buena medida las fluctuaciones "aleatorias" que aparecen en estos sistemas, y añaden una nota de interés al señalar que estas fluctuaciones están decorrelacionadas para distancias entre puntos de la sección transversal del haz láser mayores de unos 500  $\mu\text{m}$  o incluso inferiores (fluctuaciones locales). Los resultados de estas investigaciones se presentan en detalle en el capítulo 2 de esta memoria.

### **1.3.3. Inestabilidades y caos en láseres de estado sólido**

El estudio de los láseres multimodo de estado sólido mostró desde fechas muy tempranas que la distribución de la energía en los modos del resonador era altamente irregular, y variaba de disparo a disparo en los láseres pulsados; la explicación de este fenómeno era en parte heurística (gran número de modos con posibles acoplos entre sí, todos ellos compitiendo por la inversión de población disponible), y en parte derivaba de modelos teóricos de ecuaciones de balance para modos acoplados más ruido blanco que simulara el proceso de emisión espontánea ([Mal76], [Bae81], [Mir82a]). En estos primeros experimentos no se solía medir la evolución temporal en tiempo real, por lo que no podemos sino conjeturar el posible papel que jugaría el caos dinámico (determinista) como explicación alternativa de los resultados observados.

Los conceptos de la teoría de los sistemas dinámicos se abrieron paso desde aproximadamente mediados de la década de los ochenta, de forma que proveían de un nuevo esquema teórico con el que interpretar las nuevas observaciones que se realizaban sobre la dinámica de estos láseres. Un ejemplo bastante temprano de este cambio de enfoque lo tenemos en [Pol83], en el que los autores discuten un modelo de la estructura de la línea de ganancia de un láser de Yag-Nd que explicase la modulación lenta (de frecuencia aproximada 1 kHz) observada en dicho láser. La integración numérica de las ecuaciones del modelo predice en efecto tal modulación, pero superpuesta a ella se da otra mucho más rápida de carácter aparentemente irregular. Tal vez lo más interesante para nosotros sea que los autores son conscientes de que la aparición de oscilaciones "aleatorias" puede ser un efecto dinámico no muy diferente de lo que ocurre en ingeniería electrónica con los generadores de ruido (véase [Pol83], especialmente la segunda columna de la página 951).

El asimilar los láseres de estado sólido a osciladores de relajación ha proporcionado una guía bastante directa para obtener de los mismos comportamientos muy complejos en condiciones controladas con gran precisión. La idea fundamental es que muchos de estos dispositivos presentan oscilaciones regulares amortiguadas para valores típicos de sus parámetros de control (oscilaciones de relajación). ¿Por qué no

entonces modular alguno de dichos parámetros a frecuencias próximas a las de aquellas?. El parecido de este enfoque con el empleado en el estudio de osciladores amortiguados y forzados nos parece muy notable, así como enriquecedor el que estos dos campos de trabajo se puedan influir y proveer de ideas el uno al otro.

Ejemplos representativos de estas técnicas son [Kha84], [Kli84], [Mat84], y [Mac89]. Probablemente [Kli84] y [Mac89] son prototípicos en cuanto a los métodos experimentales empleados y los resultados obtenidos. En ambos se modula la intensidad de bombeo incidente en un cristal que actúa como medio activo. El parámetro de control puede ser la amplitud de la modulación (manteniendo en tal caso la frecuencia fija) o la frecuencia de la misma, y los resultados son en ambos casos la observación de una transición orden-caos mediante doblado de periodo.

Para concluir este epígrafe, unos breves comentarios sobre los modelos teóricos del caos en los láseres de estado sólido.

Habitualmente usan ecuaciones de balance que incluyen la inversión de población y la intensidad como variables dinámicas. En este caso la dimensión del espacio de fase (dos) impide la existencia de oscilaciones caóticas automantenidas, con lo que la modulación externa de los parámetros de control introduce el grado de libertad adicional necesario para poder observar estos fenómenos. Sin embargo no hay que pensar que sea ésta la única situación posible. Modelos más complicados de láseres de estado sólido, en los que el espacio de fase es naturalmente de mayor dimensión, permiten obtener autooscilaciones caóticas, multiestabilidad (existencia de múltiples atractores para unos valores fijos de los parámetros de control), histéresis y dependencia sensible a las condiciones iniciales en cuanto al comportamiento asintótico final (véase por ejemplo [Chy81]).

#### **1.4. Efectos transversales en la dinámica láser, caos espaciotemporal y turbulencia óptica**

El panorama de la dinámica láser que hemos resumido hasta el momento presenta una riqueza indudable, y una correlación satisfactoria de las teorías y modelos más simples con resultados experimentales controlados con precisión. Sin embargo, hasta el momento hemos olvidado, deliberadamente, considerar el posible efecto que pudiera tener la estructura transversal del haz láser en la dinámica (temporal) observada. Tanto es así que hasta fechas muy recientes la imagen más corriente del surgimiento de las inestabilidades temporales y el caos en láseres era que tales fenómenos se producían de manera simultánea y sincrónica en toda la sección transversal de los mismos. Esta concepción, junto con la idea tradicional de que los láseres emiten su radiación en modos correspondientes al resonador vacío han sufrido en los últimos

cinco años aproximadamente una revisión profunda, que nos hace cambiar, tal vez de modo notable, nuestras nociones acerca del surgimiento de la complejidad y las estructuras dinámicas.

Las observaciones experimentales que han obligado a una tal revisión se pueden agrupar en dos grandes categorías: por un lado existen datos claros que muestran que los patrones transversales emitidos por ciertos tipos de láseres no concuerdan con los esperados para el correspondiente resonador vacío, apareciendo además estructuras singulares (vórtices del campo eléctrico y singularidades de fase) que se generan de forma dinámica, y por otro se ha comprobado también que en láseres con un número de Fresnel relativamente alto y cuya intensidad varía de forma irregular, puntos distintos de la sección recta del haz oscilan sin correlación cruzada aparente, y cada uno de ellos de forma caótica, para separaciones de dichos puntos mucho menores que el tamaño efectivo de la sección recta.

No disponemos aún de una explicación razonablemente completa de estos resultados, aunque se trabaja a un ritmo muy rápido tanto en la observación de nuevos efectos como en el cálculo intensivo de soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales subyacentes. Los éxitos ya conseguidos nos hacen ser optimistas y pensar que la comprensión de esta nueva área de fenomenología, que podríamos muy bien llamar hidrodinámica óptica o turbulencia óptica, va a aumentar de forma significativa en los próximos años.

Así por ejemplo la predicción y posterior observación de las singularidades de fase asociadas a puntos donde el campo eléctrico es cero, pero en los que la circulación del gradiente de la fase es distinta de cero, es un éxito importante. La organización de tales singularidades en formaciones regulares ha conducido a especulaciones muy valiosas sobre las posibles aplicaciones prácticas de este fenómeno, o de otros relacionados como la multiestabilidad espacio-temporal.

A continuación quisiéramos presentar una pequeña muestra de bibliografía selecta comentada brevemente, que contiene trabajos que han contribuido, a nuestro entender de manera decisiva, a la consolidación de este nuevo campo de investigación. Siendo este un tema de investigación punta en lo que respecta a la física del láser sería pretencioso por nuestra parte cualquier intento de exhaustividad en cuanto a los trabajos citados; nos conformamos con el objetivo, más modesto, de que todo lo incluido sea relevante. Nuestras investigaciones sobre estos temas, llevadas a cabo en láseres de colorantes y  $\text{CO}_2$  se expondrán en detalle en los capítulos 2 y 3 de esta memoria.

[Lug85] y [Nar86] representan dos intentos de atacar el problema de las inestabilidades multimodo en láseres homogéneamente ensanchados partiendo de las ecuaciones completas de Maxwell-Bloch e imponiendo para su solución desarrollos modales (truncados después convenientemente), o bien integrándolas numéricamente.

Buena parte del esfuerzo teórico y numérico reflejado en estos trabajos procede del deseo de explicar los resultados experimentales de Hillman *et al* ([Hil84]) ya comentados anteriormente. A partir de estos modelos se pudo justificar la aparición de umbrales de inestabilidad muy bajos y la histéresis del comportamiento de la intensidad al variar el bombeo, asociada probablemente a la multiestabilidad que puede existir en estos sistemas tan complejos. Otros aspectos, como la desaparición súbita de la frecuencia resonante del láser y la aparición en su lugar de dos bandas centradas simétricamente, no quedan suficientemente aclarados sin embargo.

En los artículos anteriores no se incluye la estructura transversal del láser, pero si se considera la dependencia espacial con respecto a la coordenada  $z$ , o coordenada a lo largo del eje del mismo. La inclusión de la estructura transversal puede hacerse considerando el campo eléctrico descompuesto en modos normales y hallando a partir de las ecuaciones completas de Maxwell-Bloch la evolución temporal de los coeficientes de tal desarrollo ([Lug88b]).

La inclusión de los grados de libertad transversales hace bajar aún más los umbrales de inestabilidad si los comparamos con los predichos por las ecuaciones de Lorenz-Haken, poniéndolos de acuerdo con lo observado experimentalmente en sistemas multimodo ([Lug88]).

El énfasis en los análisis anteriores se centra sobre todo en obtener condiciones analíticas o semianalíticas para la estabilidad de las soluciones estacionarias y en calcular los umbrales para la aparición de fluctuaciones, pero no hay todavía indicaciones sobre la dinámica que se podría esperar de la interacción entre evolución temporal y estructuras espaciales.

La importancia fundamental que pueden llegar a tener los efectos transversales en la dinámica temporal de los láseres lo muestra bien a las claras el trabajo de Lippi y colaboradores ([Lip87]) en el que observan oscilaciones espontáneas de muy bajo umbral de la intensidad en un láser de  $\text{CO}_2$  monomodo cuyos parámetros se estabilizan cuidadosamente. Sólo la inclusión de los parámetros transversales del haz láser como nuevas variables dinámicas logra establecer el acuerdo con los resultados observados, en un sistema que de otra manera tendría que ser incondicionalmente estable.

El estudio teórico de la formación de patrones espaciales estacionarios en láseres ha conducido a la predicción y verificación experimental de dos fenómenos interesantes: el acoplo cooperativo de frecuencias y la existencia de singularidades de fase en el campo eléctrico. El primero consiste en que una familia o grupo de modos transversales, cuyas frecuencias de oscilación pueden ser distintas, son capaces de interactuar no linealmente de modo que ajustan sus frecuencias a una común, y su combinación da lugar a un patrón espacial no uniforme, pero cuya intensidad no varía con el tiempo. Asociado con el fenómeno antes descrito aparece el de las

singularidades de fase, que serían puntos en la sección recta del haz tales que en ellos el campo eléctrico se anula, y además si se realiza un circuito cerrado simple alrededor de uno de tales puntos, la circulación del gradiente de la fase es un múltiplo entero de  $2\pi$ . Al valor de dicho múltiplo se le llama *carga topológica* del vórtice o defecto de fase correspondiente. Obsérvese la analogía tan próxima con fenómenos similares que se dan en hidrodinámica, superconductividad o superfluidez. Un aspecto adicional de considerable interés en relación con los vórtices ópticos es la posibilidad de que varios de ellos se organicen formando patrones regulares que se han denominado cristales de singularidades de fase. Se ha especulado también con la posibilidad de que mediante una variación adecuada de los parámetros de control estos patrones estacionarios y regulares puedan desestabilizarse, y que la dinámica surgida entonces pueda justificar (en parte al menos) la dinámica espaciotemporal de los sistemas láser, e incluso dar lugar al análogo óptico de la turbulencia hidrodinámica.

Algunas referencias importantes en relación con los temas recién tratados, que incluyen tal vez resultados experimentales, son [Lug88a], [Lef89], [Tre89], [Are91], [Bra91a-b] y [Wei92].

Desde el punto de vista del estudio experimental de la dinámica espaciotemporal de los láseres, [Kli89] y [Dan92] son probablemente los trabajos más próximos a nuestras propias investigaciones. En el primero de ellos se da cuenta, quizá por vez primera, de la medida de caos espaciotemporal en un láser. Los autores registran digitalmente las señales procedentes de dos detectores situados en puntos distintos de la sección recta, y de área relativamente pequeña en comparación con la del haz láser. Observan señales caóticas de baja dimensionalidad en ambos detectores, y además una muy baja correlación cruzada entre ambas. El patrón espacial presente en estos experimentos podría interpretarse como una superposición del modo fundamental  $TEM_{00}$  y el  $TEM_{01}$ . Muy notable resulta el que la dimensión fractal calculada para las dos señales experimentales sea prácticamente la misma, a pesar de ser claramente distintas en forma, y a que sus espectros de Fourier difieren notablemente cuando se examinan en detalle. A juicio de los autores esto les lleva a pensar que dichas señales provienen de distintas proyecciones de un único atractor espaciotemporal caótico.

Efectos muy similares se observan en el trabajo de Dangoisse y colaboradores ([Dan92]), con el añadido de que también se explora cómo cambian estructuras espaciales muy complejas al variar un parámetro de control que puede ser el número de Fresnel ( $d^2/\lambda l$ ) o la separación en frecuencia de los modos transversos (la cual se controla usando una lente intracavidad). Se insiste en que no hay una relación directa entre estructuras complejas y estructuras desordenadas, ni que las mismas deban conducir necesariamente a un comportamiento temporal irregular o caótico. Pero también se señala la diferencia radical entre las estructuras observadas y los modos de la cavidad vacía y sus combinaciones. Según los autores sus estructuras no

corresponden a modos altos del resonador, sino que son el resultado de una dinámica multimodal global. En términos similares se expresa C. O. Weiss en una revisión muy reciente de los efectos transversos en láseres, que ya hemos citado anteriormente ([Wei92]).

El papel de las simetrías internas de las ecuaciones de Maxwell-Bloch o de las constricciones geométricas impuestas por las peculiares características de los resonadores ópticos usados habitualmente se analiza en [Elg87], [Are90], [Gre90], [Jak92], [Pas93a], [Pas93c], [D'An92] y [Are92b] entre otros, en relación con la generación de patrones espaciales y la interacción entre dinámica espacial y temporal.

Los análisis de [Elg87], [Jak92], [Pas93a] y [Pas93c] se centran en clases de soluciones exactas de las ecuaciones de Maxwell-Bloch.

En [Pas93a] y [Pas93c] se analiza la dinámica de soluciones en forma de ondas planas no lineales, que pueden interpretarse como dinámica espacial (si fijamos el tiempo), o temporal (si fijamos un punto concreto de la sección recta del haz), debido a la alta simetría que presentan. El capítulo 4 de esta memoria estará dedicado a discutir los resultados obtenidos en este campo.

En cuanto a [Are90], [Gre90], [D'An92] y [Are92b], se centran en la demostración experimental de la existencia de caos espaciotemporal en sistemas ópticos y en la influencia de la ruptura espontánea de la simetría  $O(2)$  (impuesta por la geometría de los resonadores ópticos habituales) en los patrones espaciotemporales que un láser puede generar. Este planteamiento tan general, que usa las herramientas de la teoría de bifurcaciones y de la teoría de grupos, tiene la ventaja de que las conclusiones obtenidas son en gran medida independientes de los modelos concretos usados para describir la dinámica del láser.

Unas pocas observaciones más para concluir: por una parte tenemos que ya se están empezando a considerar las posibles aplicaciones de los fenómenos de multiestabilidad espaciotemporal al diseño de memorias ópticas asociativas, que funcionarían de una manera más próxima a las de los seres vivos que las actualmente existentes. La idea fundamental es sencilla; al existir varias configuraciones estables o cuasiestables posibles, podemos en principio almacenar información asociándola a tales patrones. Es posible conmutar entre los diversos estados mediante señales semilla adecuadas, o presentando al sistema patrones similares a los almacenados que fueran cambiando o alternándose. Las posibles aplicaciones y realizaciones prácticas de estos dispositivos se discuten de manera un tanto especulativa aún en [Ots90], [Ots92] y [Wei92]. Este ejemplo ilustra las posibilidades que quedan por descubrir en un campo que empezó con el deseo expreso de comprender más profundamente los mecanismos que subyacen a la formación de estructuras dinámicas complejas.

Por último nos parece interesante señalar que nuestra comprensión actual de los fenómenos de aparición, desarrollo y evolución de las estructuras espaciotemporales

en sistemas fuera del equilibrio está limitada en buena medida por nuestro insuficiente conocimiento del comportamiento puramente matemático de las ecuaciones que rigen los mismos. Tenemos abierto pues un frente de investigación en el que son de esperar desarrollos fructíferos en áreas de la matemática pura y aplicada, la experimentación para caracterizar y descubrir nuevos fenómenos y las aplicaciones prácticas. A juzgar por lo ocurrido en épocas pasadas en situaciones similares el progreso en todas ellas no se ha de hacer esperar. Esperamos ser testigos, y en parte autores, del mismo.



## CAPITULO 2

### ASPECTOS EXPERIMENTALES DE LAS FLUCTUACIONES ESPACIO-TEMPORALES DE INTENSIDAD EN EL LASER DE COLORANTES

#### 2.1. Descripción del sistema experimental

El sistema usado en los experimentos sobre dinámica espacio-temporal en láseres de colorantes consiste en uno comercial (Phase-R) pulsado y de excitación coaxial mediante lámpara flash. En la figura 2.1 se muestran las partes más importantes del mismo.

**Figura 2.1.** Partes fundamentales del láser de colorantes usado en los experimentos de dinámica espacio-temporal.

El diseño original del fabricante es el que se ha usado en la mayoría de los experimentos, pero también se ha medido con otro diseño, conceptualmente muy simple, que utiliza un solo condensador de  $0.5 \mu\text{F}$  a una tensión máxima de 30 kV, un interruptor controlado por tensión presurizado con  $\text{N}_2$ , la lámpara coaxial y la cavidad resonante.

En todos los experimentos que describiremos en este capítulo se ha recogido una parte de la intensidad luminosa del haz láser en campo próximo mediante una fibra óptica montada en un diafragma de abertura variable (entre  $40 \mu\text{m}$  y  $1 \text{ mm}$  típicamente) que se puede mover mediante dos tornillos micrométricos en un plano paralelo al plano del espejo semirreflectante del láser (espejo de salida). De esta forma es posible seleccionar para su observación una zona (más o menos grande) cualquiera de la sección recta del haz luminoso del láser.

Salvo mención expresa de lo contrario se ha usado siempre una abertura de  $50 \mu\text{m}$  centrada con respecto a la distribución transversal de intensidad del láser, que es la mínima que se puede reproducir de forma fiable con el diafragma empleado. Vemos pues que, en general, hemos observado siempre una zona muy pequeña de la sección del haz (cuyo diámetro típico es de  $15 \text{ mm}$ ), de ahí que a la dinámica estudiada la hayamos denominado *local*. En algunos experimentos hemos empleado diafragmas

intracavidad circulares de PVC de diámetros variables (entre 2 y 24 mm), colocados junto al espejo de reflexión total.

La radiación se detecta mediante un fotodiodo PIN con tiempo de respuesta del orden de 1 ns, polarizado a 90 V y conectado a un digitalizador rápido de transitorios (Tektronix 7912 AD), con un ancho de banda de 500 MHz en tiempo real y que proporciona 512 muestras temporales equiespaciadas de la señal medida con una resolución vertical de 9 bits. El digitalizador se controla mediante un ordenador asociado, y los datos recogidos se trasladan al mismo para su posterior elaboración y tratamiento. Toda la electrónica de detección y control se ha situado dentro de una cámara de Faraday, lo que permite una reducción drástica de las interferencias o influencias radioeléctricas espurias que pudieran afectar a los fenómenos estudiados. En la figura 2.2 se muestra el diagrama del sistema experimental completo.

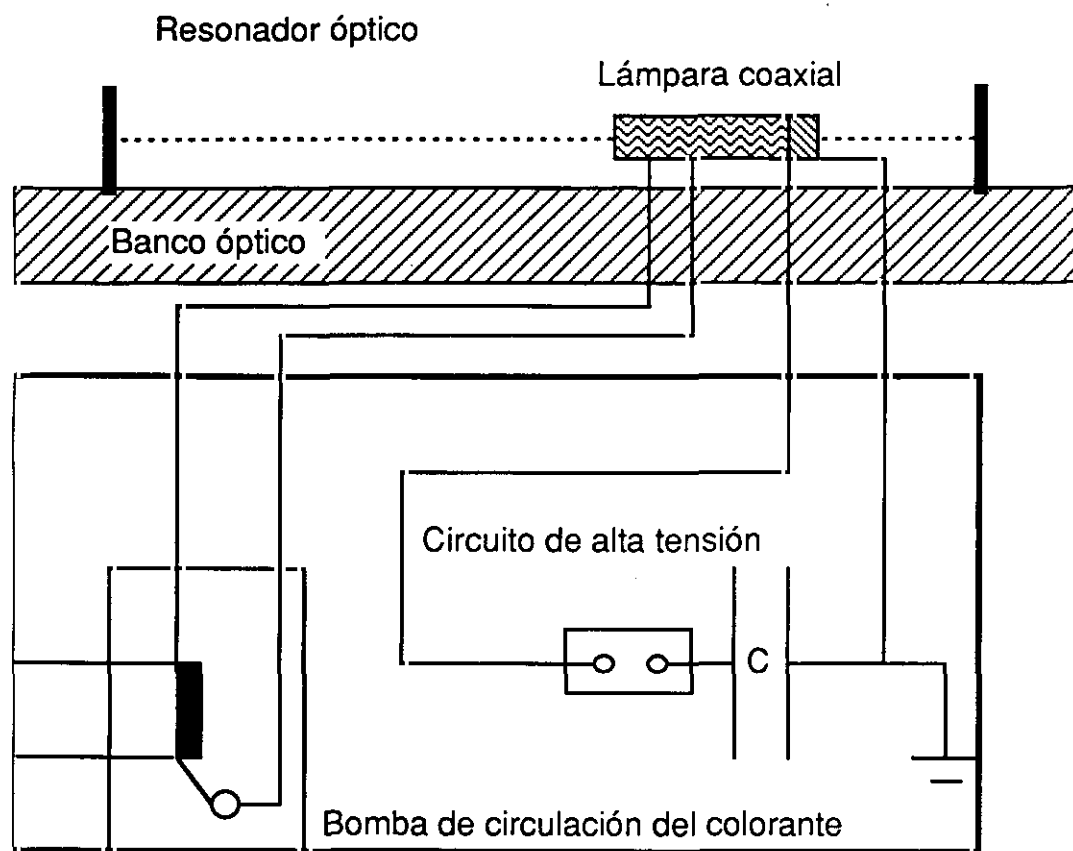
**Figura 2.2.** Esquema del dispositivo experimental utilizado. E.S. y E.R.T. representan el espejo de salida y el de reflexión total respectivamente, D.E. y D.I. los diafragmas externo e interno. El símbolo en forma de triángulo dentro de la cámara de Faraday representa el fotodiodo rápido utilizado para la detección de la radiación.

La mezcla activa de colorante y disolvente se hace circular en circuito cerrado a través del interior de la lámpara flash, siendo ambas refrigeradas por agua circulando en circuito abierto a la temperatura del laboratorio (17-20 °C). De esta forma se garantiza que la temperatura de la mezcla se mantenga estable (con oscilaciones máximas de 3 °C) durante varias horas seguidas. Dicha temperatura se mide mediante un termopar calibrado de cromel-alumel insertado en el circuito de circulación de la mezcla.

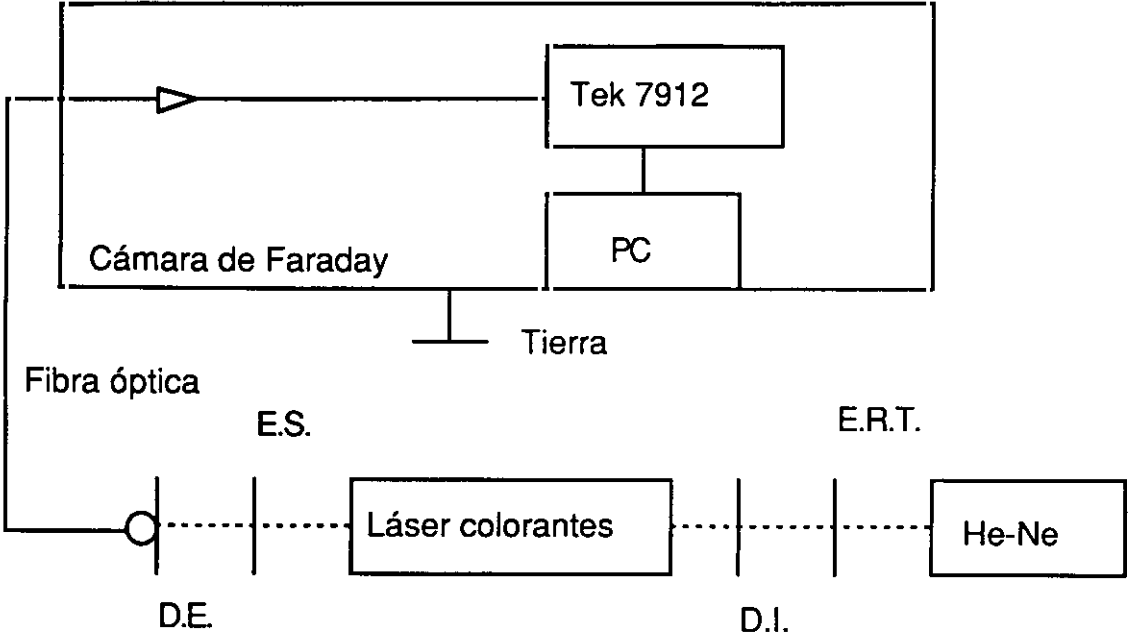
Con esto queda descrito el sistema experimental y pasamos a enumerar las condiciones de trabajo en las que se ha usado.

## **2.2. Parámetros de control del láser de colorantes**

El sistema experimental descrito en el apartado anterior es de una gran versatilidad, lo que quiere decir que el experimentador dispone de un gran número de parámetros de control que puede variar a voluntad y que, en principio, pueden afectar a la dinámica del sistema. Esta flexibilidad tiene sin embargo el inconveniente de hacer que la exploración exhaustiva de la dinámica en función de todos esos parámetros sea virtualmente imposible. Afortunadamente la experiencia nos ha ayudado en este caso a hacer la selección, mostrando que sólo algunos de ellos influyen de manera notable en la estructura de las fluctuaciones espacio-temporales de intensidad que estudiamos.



**Figura 2.1**



**Figura 2.2**

A continuación enumeramos los parámetros de control explorados:

- 1) Tamaño de la sección recta del haz detectada por el fotodiodo.
- 2) Composición y concentración de la mezcla activa.
- 3) Reflectividad del espejo semitransparente (plano).
- 4) Longitud del resonador.
- 5) Alineamiento del resonador.
- 6) Temperatura de la disolución.
- 7) Diámetro del diafragma circular intracavidad (cuando está presente).
- 8) Tensión de excitación aplicada a la lámpara flash.
- 9) Curvatura del espejo de reflexión total.

El primero de los parámetros de control reseñado en la lista anterior es distinto de todos los demás, puesto que evidentemente *no afecta* de ninguna forma a la dinámica del láser de colorantes. Se ha incluido, sin embargo, porque las medidas realizadas variando el tamaño del diafragma exterior nos han permitido deducir el carácter local de dicha dinámica, o lo que es lo mismo, mostrar experimentalmente que las fluctuaciones temporales están descorrelacionadas espacialmente para distancias mayores o del orden de 0.2 mm.

Se han realizado algunas observaciones cualitativas usando otros colorantes aparte de la rodamina 6G (rodamina B, mezclas de rodamina 6G y cresil violeta) y otros disolventes distintos del alcohol metílico (alcohol etílico), con el resultado importante de que las fluctuaciones locales también aparecen en estos casos. Sin embargo los aspectos referentes al efecto de estos cambios de colorante(s) y/o disolvente(s) en la estructura "fina" de las fluctuaciones no se ha estudiado en detalle.

De los restantes parámetros de control hemos podido comprobar que la concentración de la disolución (rodamina 6G en metanol) y la reflectividad del espejo de salida no influyen apreciablemente en la dinámica, dentro de los márgenes en que han sido variados (se han estudiado disoluciones de rodamina 6G en metanol de concentraciones  $1.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $2.5 \cdot 10^{-5}$  y  $4.4 \cdot 10^{-5}$  molar, y reflectividades del espejo de salida del 30, 60 y 90 %). A partir de este resultado hemos fijado la concentración de la disolución en  $2.5 \cdot 10^{-5}$  molar en los experimentos realizados con el láser de colorantes.

La caracterización experimental del sistema vendrá dada por lo tanto por los parámetros longitud del resonador, alineamiento, temperatura de la mezcla, diámetro del diafragma intracavidad (en caso de que se use), tensión de excitación aplicada a la lámpara flash y curvatura del espejo de reflexión total.

## **2.3. Tratamiento numérico de los datos procedentes del láser de colorantes**

Los datos procedentes de nuestro experimento son siempre series temporales correspondientes a la intensidad luminosa del láser medida en campo próximo en una zona más o menos pequeña de la sección transversal del mismo. En el caso del láser de colorantes la duración de los registros temporales ha sido siempre de 500 ns, muestreados en 512 puntos equiespaciados, con una resolución vertical de 9 bits.

Como el láser que estamos estudiando es pulsado, las fluctuaciones de intensidad aparecen superpuestas a la evolución temporal más lenta correspondiente al pulso láser. Si a ésto unimos el hecho de que la reproducibilidad de los parámetros del pulso láser de un disparo a otro no es mejor de un 10-20 %, comprenderemos la necesidad de utilizar tratamientos numéricos que nos permitan separar en cada pulso individual las fluctuaciones de la otra evolución más lenta [Pas90].

Una vez extraídas las fluctuaciones de las señales experimentales hemos utilizado técnicas de transformada de Fourier y transformada de Fourier inversa, funciones de autocorrelación y de correlación cruzada, de reconstrucción del atractor subyacente y el algoritmo de Grassberger-Procaccia para obtener mediante las mismas la máxima cantidad posible de información.

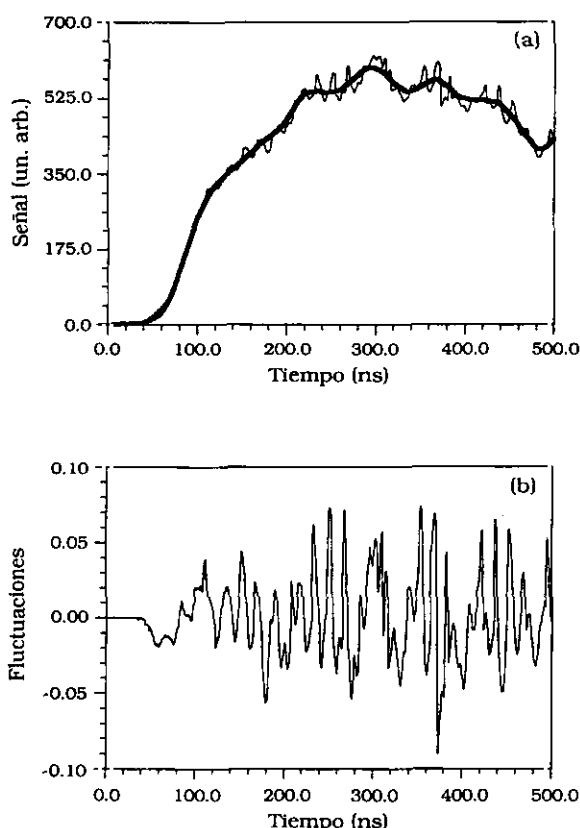
A continuación vamos a describir en detalle la técnica de separación de las fluctuaciones de la señal experimental, el algoritmo de Grassberger-Procaccia y la técnica de reconstrucción del atractor del sistema dinámico. En cuanto al análisis de Fourier es suficientemente conocido, de manera que pasaremos sobre ello muy brevemente.

### **2.3.1. Algoritmo de interpolación y separación de las fluctuaciones de la señal experimental**

La idea básica de este algoritmo es usar la misma señal experimental para construir una aproximación a la evolución lenta correspondiente al pulso láser. Esto se consigue "muestreando" la señal ya adquirida a una frecuencia mucho menor que la usada para registrarla, y construyendo a partir de los puntos así obtenidos una aproximación en forma de línea quebrada (lineal a trozos). Para suavizar la aproximación lineal a trozos se promedian cinco de ellas obtenidas usando distintos conjuntos de puntos de la señal experimental de partida.

En el caso del láser de colorantes las zonas en que aparecen las fluctuaciones se ha dividido en veinte partes del mismo tamaño designadas  $P_1, \dots, P_{20}$ . En cada una de ellas hay varios puntos de la señal. Los puntos dentro de cada segmento  $P_i$  se designan como  $x_j, j = 1, \dots, k$  ( $k$  es el número de puntos en cada  $P_i$ ). La interpolación

se construye tomando un punto con índice concreto, pongamos  $x_i$ , de cada uno de los segmentos  $P_1, \dots, P_{20}$ . El índice  $i$  es el mismo para todos ellos. Con los veinte puntos así elegidos se construye de manera inmediata una aproximación lineal a trozos de la señal de partida. Hemos promediado cinco de ellas eligiendo en cada caso diferentes  $x_i$  dentro de los segmentos  $P_1, \dots, P_{20}$ . En la figura 2.3 puede verse una aplicación de esta técnica a una señal experimental concreta.



**Figura 2.3.** Aplicación del algoritmo de filtrado de bajas frecuencias a una señal experimental obtenida con el láser de colorantes. (a) la línea de trazo fino es la señal medida, la de trazo grueso es la obtenida con el algoritmo de filtrado. En (b) se representa la diferencia entre ambas normalizada al máximo, esto es, las fluctuaciones.

Como es evidente a partir de la figura 2.3 las fluctuaciones serán proporcionales a  $f_{\text{experimental}}(t) - f_{\text{interpolada}}(t)$ . Como normalización de las fluctuaciones se ha elegido el máximo de  $f_{\text{interpolada}}(t)$ , siendo por lo tanto  $\text{fluctuaciones}(t) = (f_{\text{experimental}}(t) - f_{\text{interpolada}}(t)) / (f_{\text{interpolada}})_{\text{max}}$ .

En la referencia [Pas90] se puede comprobar que el método de interpolación descrito equivale a filtrar de la señal de partida todas las frecuencias mayores o iguales a una cierta frecuencia de corte, haciendo por lo tanto que  $f_{\text{interpolada}}(t)$  contenga solamente la parte de bajas frecuencias. La frecuencia de corte (unos 40 MHz en nuestro caso)

depende del número de puntos que tomemos para interpolar. Para el láser de colorantes se ha determinado de forma empírica que el valor usado para el número de puntos (20) en cada segmento  $P_i$  es próximo al óptimo en el sentido de que asegura una separación razonable y de bajo coste computacional de las altas frecuencias (fluctuaciones) que nos interesan y de la evolución lenta.

Además de su uso para extraer las fluctuaciones, este algoritmo nos permitiría (a partir de  $f_{interpolada}(t)$ ) hacer estudios estadísticos de las propiedades de los pulsos láser, como por ejemplo de su energía, anchura o potencia de pico, aunque en esta memoria no hemos estudiado estos aspectos.

### 2.3.2. Análisis de Fourier

La aplicación de series y transformadas de Fourier al análisis de datos es sobradamente conocida y no insistiremos mucho en ello. Solamente señalaremos que por el teorema de Wiener-Khintchine, que establece que la transformada de Fourier de la función de autocorrelación es igual al módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de la señal de partida, las técnicas de análisis de Fourier y la función de correlación contienen información complementaria. Lo mismo podríamos decir del espectro cruzado y la función de correlación cruzada, técnicas que también se usan en esta memoria.

En la aplicación a señales experimentales hemos usado tanto técnicas de transformada rápida de Fourier (o FFT por su acrónimo en inglés *Fast Fourier Transform*) como transformada directa e inversa de Fourier numéricas, obtenidas a partir de las definiciones

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega\end{aligned}\tag{2.1}$$

y evaluando las integrales numéricamente. Este segundo enfoque tiene la ventaja de que se pueden resolver extraordinariamente bien los picos de frecuencia con solo evaluar las integrales correspondientes en los valores de frecuencia que sean necesarios, con el inconveniente de ser mucho más lento que las técnicas de FFT.

### 2.3.3. El algoritmo de Grassberger-Procaccia

Desde que en 1983 Grassberger y Procaccia propusieran este algoritmo [Gra83a-b], se ha convertido en un tratamiento clásico aplicado a señales temporales de variación



irregular procedentes de los sistemas más variados, a la búsqueda de una estimación de la dimensión fractal del atractor subyacente a dichas señales. En la literatura existen muy buenas revisiones sobre la aplicación y limitaciones de este método, por lo que nosotros nos limitaremos a describirlo y a señalar las precauciones que hay que adoptar al interpretar los resultados que se obtienen del mismo, sobre todo para señales experimentales muestreadas en un pequeño número de puntos (como es nuestro caso).

Supongamos que de un sistema hemos medido una cierta variable dinámica  $x$  (que supondremos por simplicidad un escalar) a intervalos equiespaciados de tiempo; obtenemos así una serie temporal que podemos designar  $S = \{ x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N) \}$  (estamos suponiendo que la variable se ha muestreado en  $N$  puntos).

A partir de dicha serie temporal se construyen vectores en  $\mathbf{R}^n$  mediante el siguiente procedimiento

$$\begin{aligned}\vec{v}_1^{(n)} &= (x(\tau), x(\tau+T), \dots, x(\tau+(n-1)T)) \\ \vec{v}_2^{(n)} &= (x(\tau+\eta), x(\tau+\eta+T), \dots, x(\tau+\eta+(n-1)T)) \\ \vec{v}_3^{(n)} &= (x(\tau+2\eta), \dots, x(\tau+2\eta+(n-1)T))\end{aligned}\tag{2.2}$$

etc, con  $T$  y  $\eta$  adecuadamente elegidos [Gra83a-b], [Eck85], [Rab87], [Ohe88]. Estos vectores proporcionan una imagen en  $\mathbf{R}^n$  del sistema dinámico original. Existen teoremas debidos a Takens y Mañé [Eck85] que demuestran que si  $d$  es la dimensión (fractal, es decir, no entera en general) del atractor del sistema dinámico que estamos considerando, entonces para  $n \geq 2d+1$  la reconstrucción del atractor es fiel (es decir, uno a uno) y se puede estimar  $d$  como

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{C_n(r)}{N^2}\right)}{\log(r)}\tag{2.3}$$

donde  $C_n(r)$  es el número de pares de vectores  $\mathbf{v}_i^{(n)}, \mathbf{v}_j^{(n)}$  tales que su distancia mutua (para una norma dada, generalmente la euclídea) es menor que  $r$ .

En la aplicación práctica del algoritmo lo que se hace es representar  $\log C_n(r)$  frente a  $\log r$  para un cierto rango de valores de  $n$ , siendo  $n_{max} > 2d+1$  (suponiendo que se disponga de alguna estimación a priori de  $d$ ; en caso contrario la elección de  $n_{max}$  habrá de hacerse siguiendo un método de ensayo y error, que en la práctica consiste en variar de manera sistemática el valor de  $n$ ). Si la serie temporal  $S$  proviene de un proceso caótico determinista debe existir un rango de valores de  $r$  para el cual se verifique que  $\log C_n(r) = d \log r + a$ .

Así pues el cálculo de  $d$  se hará observando la progresiva saturación del valor de la pendiente de las curvas  $\log C_n(r)$  frente a  $\log r$  cuando  $n$  crece.

Si por el contrario la serie temporal  $S$  fuese un puro ruido blanco entonces se puede demostrar que  $\log C_n(r) = n \log r + b$ , con lo cual la pendiente no se saturaría (no tendería a un valor límite), sino que crecería monótonamente con  $n$ .

Es esta propiedad de poder discriminar entre señales deterministas (aunque tal vez caóticas) y ruido blanco la que hace a este método particularmente atractivo para caracterizar experimentalmente una dinámica temporal observada.

No podemos dejar de señalar, sin embargo, algunas de las limitaciones de este método cuando se aplica a señales experimentales reales [Pas90].

En primer lugar, la existencia del límite dado por la fórmula (2.3) sólo está garantizada para series temporales libres de ruido y de longitud infinita. Ni que decir tiene que en la práctica la situación es siempre la contraria: las medidas están siempre afectadas (en mayor o menor medida) por el ruido, y se muestrean en un número finito de puntos, que salvo en experimentos muy concretos no suele superar los pocos miles.

En estas condiciones se puede comprobar, mediante experimentos numéricos cuidadosos, que la estimación de la pendiente no es sencilla y conlleva un error relativamente grande y difícil de estimar. Esto se debe principalmente al requerimiento de calcular el límite cuando  $r \rightarrow 0$ , ya que con señales ruidosas y muestreadas en un número finito (y no muy grande) de puntos es precisamente esta zona donde la estadística es más pobre. Se podría decir que la aplicación del algoritmo de Grassberger-Procaccia a señales experimentales tiene tanto de arte como de ciencia.

Incluso en el caso ideal de que el ruido sea prácticamente inexistente y se puedan obtener series temporales suficientemente largas (lo que es fácil de conseguir en experimentos numéricos), el método puede llegar a ser inaplicable si la dimensión del atractor es muy grande. De hecho la caracterización experimental de señales procedentes de sistemas dinámicos con atractores de dimensión media o grande (pongamos  $d > 10$ ) está aun en sus comienzos. En nuestro caso, afortunadamente, cuando la técnica ha dado resultado, las dimensiones obtenidas han sido siempre pequeñas (menores que cinco), con lo cual se simplifican los problemas de interpretación [Pas90].

Para acabar esta sección dedicada al algoritmo de Grassberger-Procaccia nos gustaría añadir que se ha demostrado en la literatura que dicho algoritmo da resultados que convergen hacia un valor pequeño de la dimensión fractal incluso para señales que se han generado mediante técnicas aleatorias (ruido coloreado) [Osb89], lo cual implica que, en general, el algoritmo G-P sólo nos permite concluir si una señal dada es más ordenada, o diferente en sus propiedades estadísticas, que un ruido blanco. Concluir pues que tal señal procede de un sistema caótico determinista con pocos grados de libertad requiere hipótesis o medidas adicionales acerca del origen de la señal que se

está estudiando. Por ejemplo, en nuestro caso sabemos que las señales proceden de un sistema físico (el láser) regido en aproximación semiclásica por unas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales acopladas conocidas como ecuaciones de Maxwell-Bloch; por lo tanto es razonable pensar que (suponiendo que los ruidos externos se mantienen dentro de unos límites tolerables) la dinámica irregular observada en la práctica es el reflejo de la riqueza de comportamientos de las ecuaciones subyacentes, y de esta forma la interpretación de los resultados del algoritmo G-P es mucho más clara y provee de hecho una información útil, a saber, una estimación de la dimensión fractal del conjunto del espacio de fases al que la dinámica tiende asintóticamente.

#### **2.3.4. Técnica de reconstrucción del atractor**

El desarrollo realmente vertiginoso del estudio de los sistemas no lineales en los últimos quince o veinte años ha generado, entre otras muchas cosas, una serie de técnicas potentes y de uso relativamente sencillo que nos permiten acceder de una forma directa y muy gráfica a algunas propiedades cualitativas de dichos sistemas. Una de estas técnicas es la reconstrucción del atractor del sistema dinámico, realizada a partir de las medidas experimentales de una variable del mismo.

Hablando de una forma un poco imprecisa entenderemos por atractor aquel conjunto compacto e invariante por la dinámica al cual tiende asintóticamente la trayectoria física del sistema cuando  $t \rightarrow \infty$ . Un mismo sistema dinámico puede poseer más de un atractor, cuyas propiedades dinámicas pueden ser asimismo distintas [Pas93b]. Supongamos por simplicidad que el sistema objeto de estudio presenta un único atractor, y que hemos medido una serie temporal correspondiente a una cierta propiedad (o variable) del mismo  $S = \{ x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n) \}$ . Una técnica estándar de reconstrucción del atractor consiste en representar  $dx(t)/dt$ , calculada numéricamente a partir de  $S$ , frente a  $x(t)$ . Si la representación gráfica de  $dx(t)/dt$  versus  $x(t)$  da como resultado una figura topológicamente equivalente a un círculo tenemos que el comportamiento dinámico asociado a  $x(t)$  es periódico; si la figura resulta más compleja, pero cerrada sobre sí misma tendremos un comportamiento también periódico, de periodo progresivamente mayor según se va complicando más la figura  $dx(t)/dt$  versus  $x(t)$ . Si la figura es aún más complicada y no se cierra sobre sí misma tenemos dos posibilidades, una de ellas es que el sistema esté ejecutando un movimiento cuasiperiódico, en cuyo caso el espectro de Fourier de la señal medida presentará picos discretos muy claros y se podrán escribir todas las frecuencias como combinaciones lineales enteras de unas pocas frecuencias básicas, y la otra es que se trate de un atractor extraño y de una evolución temporal caótica aunque determinista. Creemos que es importante señalar que esta técnica muestra toda su

potencia cuando se usa en combinación con otras tales como el análisis de Fourier (ya mencionado), el algoritmo G-P o el cálculo de los exponentes de Lyapunov.

Para poder aplicar esta técnica con resultados satisfactorios es necesario que la señal de partida  $x(t)$  esté bien muestreada, en el sentido de que incluso en sus zonas de variación más rápida hayamos tomado varios puntos experimentales, de forma que la derivada numérica (una operación muy inestable) siga proporcionando una función razonablemente suave. En ciertos casos puede resultar interesante hacer una representación tridimensional en cuyos ejes pongamos  $x(t)$ ,  $dx(t)/dt$ ,  $d^2x(t)/dt^2$ . La interpretación es a grandes rasgos la misma, pero algunas veces esta representación tridimensional puede resultar más clara al eliminar algunas autointersecciones espurias que pueden aparecer en la representación bidimensional. Sin embargo, al tener que calcular la segunda derivada a partir de los datos experimentales se exigen unas señales de partida extremadamente bien muestreadas, por lo que este procedimiento (tridimensional) no se usa muy frecuentemente en la práctica.

El procedimiento descrito más arriba está íntimamente relacionado con el método de las variables retrasadas, ampliamente usado también en la caracterización experimental de señales caóticas. Esta técnica parte de nuevo de la serie temporal  $S = \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$  y a partir de ella reconstruye una imagen del atractor en  $\mathbf{R}^2$  o  $\mathbf{R}^3$  usando como variables que se representan en los distintos ejes coordenados  $x(t)$  y  $x(t+\tau)$  (en  $\mathbf{R}^2$ ) o bien  $x(t)$ ,  $x(t+\tau)$ ,  $x(t+2\tau)$  (en  $\mathbf{R}^3$ ). La elección de  $\tau$  ha de efectuarse de tal forma que no sea demasiado pequeño con respecto a los periodos típicos de las fluctuaciones, ya que en este caso la imagen que se obtiene del atractor está fuertemente concentrada a lo largo de la diagonal principal (lo que no es otra cosa que decir que hay una fuerte correlación entre  $x(t)$  y  $x(t+\tau)$  para  $\tau$  muy próximo a cero), ni demasiado grande con respecto al tiempo de correlación de las fluctuaciones. Como en el caso del algoritmo de Grassberger-Procaccia, es necesaria cierta dosis de experiencia para hacer de esta técnica un diagnóstico potente. Una posible ventaja de esta técnica con respecto a la de representar la señal frente a su(s) derivada(s) es que no es tan exigente en lo tocante al muestreo de  $x(t)$ .

Cuando se aplican las técnicas de reconstrucción del atractor o el algoritmo G-P a señales experimentales es necesario que tales señales sean estacionarias o al menos cuasiestacionarias. Esto quiere decir en la práctica que haya transcurrido tiempo suficiente entre que el sistema físico comenzó a funcionar y el momento en que se toman las medidas, así como que las condiciones de control relevantes hayan permanecido constantes. Una manera práctica de saber si una señal experimental es o no estacionaria es fijarse en una determinada propiedad estadística de la misma (por ejemplo en su amplitud media durante un cierto intervalo temporal, o en su desviación respecto a dicho valor medio, etc) y comprobar que se mantiene constante a lo largo de todo el tiempo durante el que se han registrado los datos. Este tipo de comprobación

se ha realizado explícitamente en el caso del láser de colorantes, obteniéndose que, salvo en la fase inicial de subida del pulso láser, las fluctuaciones son de hecho estacionarias con muy buena aproximación. En honor a la verdad hay que decir que la naturaleza pulsada de los fenómenos que se han estudiado siempre arroja dudas más que razonables sobre si podemos suponer condiciones estacionarias. De hecho sólo *a posteriori* es posible justificar plenamente que el enfoque adoptado es al menos coherente. Un criterio de estacionariedad menos riguroso que el presentado antes es el que guía en realidad la investigación de estos fenómenos: el de que las fluctuaciones sean de un periodo mucho más corto que el tiempo necesario para que la evolución promedio cambie significativamente.

Una vez que hemos descrito las técnicas de análisis de datos que se han empleado vamos a discutir los aspectos más relevantes de la dinámica del láser de colorantes objeto de estudio.

## **2.4. Dinámica espacio-temporal del láser de colorantes**

Los aspectos más importantes de la dinámica espacio-temporal del láser estudiado pueden resumirse como sigue.

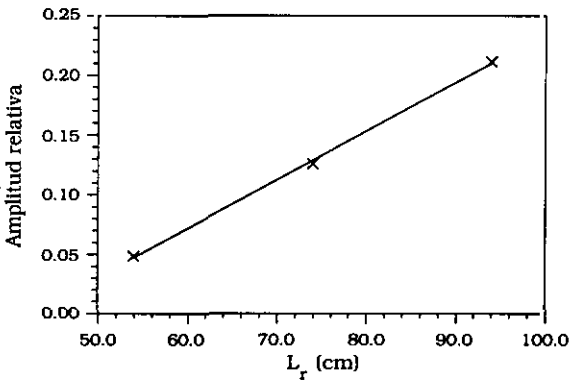
En primer lugar tenemos que en ausencia de diafragmas intracavidad y con el láser alineado, la evolución temporal local en campo próximo consiste en fluctuaciones irregulares de la intensidad superpuestas al pulso luminoso del láser. Este comportamiento aparece junto con o en las inmediatas proximidades del umbral láser, por lo que el primer y segundo umbral coinciden en nuestro caso. Por lo tanto estamos ante un sistema para el cual los modelos más simples de caos en láseres (modelo de Lorenz-Haken) no pueden ser correctos.

Las fluctuaciones irregulares se pueden caracterizar en primera instancia por su amplitud relativa frente a la del pulso suavizado del láser (obtenido mediante la técnica de interpolación descrita en §2.3.1) y por su espectro de potencia promedio. Dicho promedio es en el sentido de promedio sobre un conjunto de realizaciones o repeticiones del experimento manteniendo los parámetros de control constantes. A la hora de discutir algunos resultados es conveniente tener en cuenta que para el análisis de las fluctuaciones rápidas de la intensidad se ha empleado en los datos un filtro computacional que atenúa las frecuencias por debajo de 40 MHz. Esto no quiere decir que las frecuencias menores que dicha frecuencia de corte sean irrelevantes para el esclarecimiento de la dinámica del láser, sino tan solo que no parecen importantes para el estudio de las fluctuaciones completamente desarrolladas.

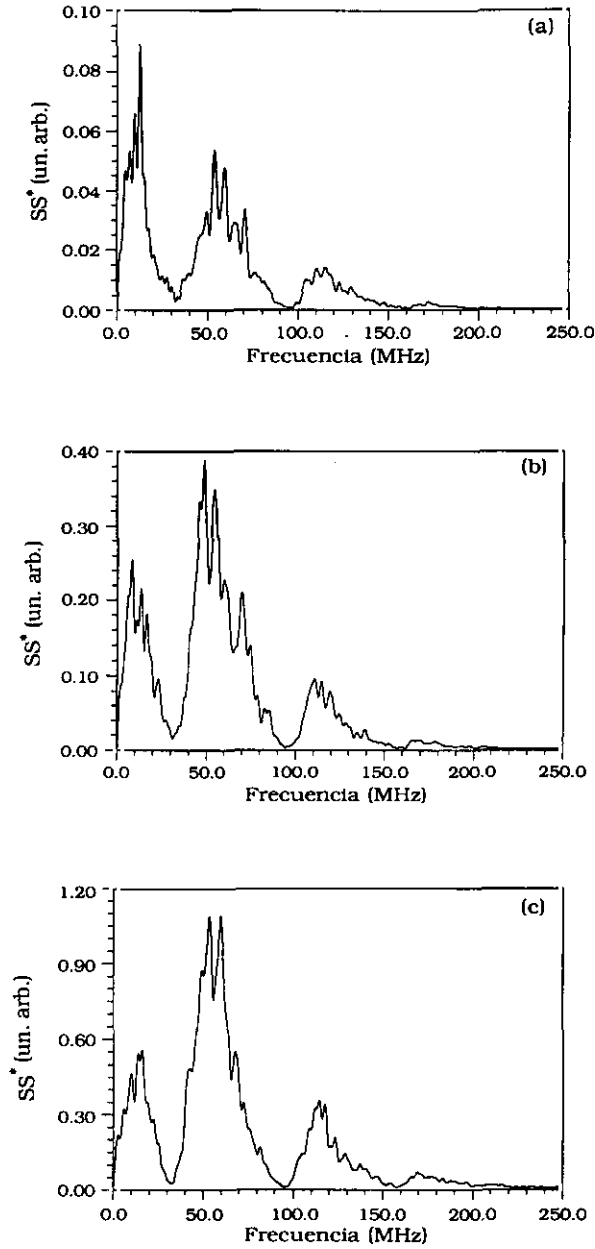
Una característica importante (y de las más sorprendentes a nuestro juicio) de las fluctuaciones estudiadas es que la amplitud promedio de las mismas se puede

modificar de forma controlada cambiando algunos de los parámetros del sistema, mientras que su estructura espectral es insensible a dichos cambios. A continuación discutimos estos hechos con mayor detalle.

Uno de los parámetros que más influyen sobre la amplitud relativa de las fluctuaciones es la longitud del resonador. Se ha comprobado que cuanto mayor es ésta mayores son las fluctuaciones frente a la señal promedio. Se han estudiado de forma sistemática tres longitudes del resonador (distancia entre espejos), a saber,  $L_r = 54, 74, 94$  cm. El cambio de longitud del resonador de 54 a 94 cm multiplica por un factor 4.5 la amplitud relativa de las fluctuaciones (figura 2.4). Sin embargo, la forma del espectro promedio no cambia significativamente, mostrando una estructura de tres bandas anchas de frecuencia centradas en 55, 110 y 165 MHz. La figura 2.5 resume la información relevante sobre espectros promedio en este caso.



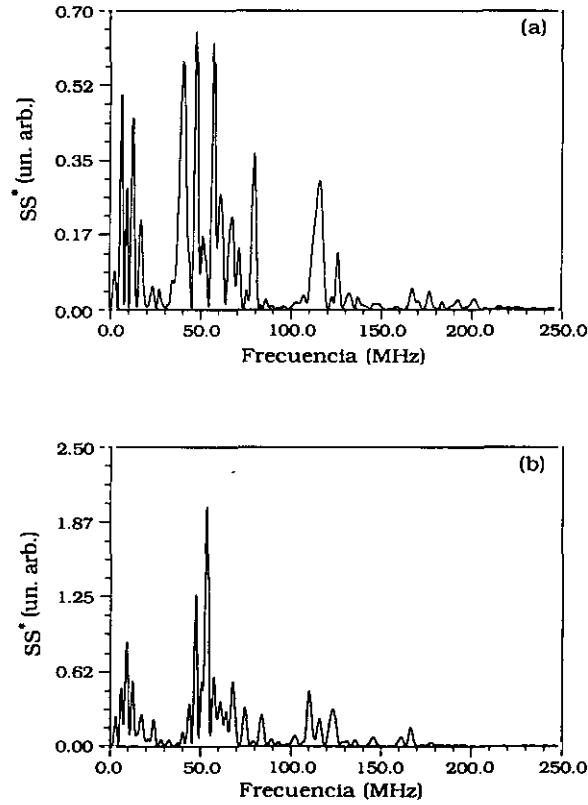
**Figura 2.4.** Dependencia de la amplitud promedio de las fluctuaciones irregulares frente a la señal total al variar la longitud del resonador.



**Figura 2.5.** Espectros de potencia promediados (40 realizaciones en cada caso) para  $L_T = 54$ , 74 y 94 cm. Obsérvese que la amplitud de los espectros crece con la longitud del resonador, pero la estructura de los mismos es insensible a dicho cambio.

La invariancia de dichos espectros al cambiar  $L_T$  elimina la posibilidad de que las fluctuaciones procedan del simple batido de los modos longitudinales del resonador, ya que en este caso las frecuencias medias deberían desplazarse al variar la distancia entre espejos de acuerdo con la relación  $\Delta\nu = c/2L_T$ . Los espectros individuales de las señales presentan un aspecto mucho más irregular que los promedios, y están compuestos en general por multitud de picos espectrales que tienden a agruparse en

torno a las bandas de frecuencia mencionadas más arriba. Dichos espectros cambian de disparo a disparo no sólo en el número de picos, sino también en su localización y amplitud, lo que da idea de la irregularidad de las fluctuaciones temporales de intensidad (figura 2.6).



**Figura 2.6.** Espectros de potencia de dos señales tomadas en las mismas condiciones experimentales, que muestran la variación de los mismos en cuanto al número de picos, su localización y amplitud.

La aplicación del algoritmo G-P a señales tomadas con  $L_r = 54, 74$  y  $94$  cm (tres en cada caso) muestra que para  $L_r = 54$  cm no se da convergencia de la pendiente, habiéndose explorado dimensiones de recubrimiento hasta  $n = 12$ . Para  $L_r = 74$  cm se obtiene convergencia hacia valores entre 2 y 4, y para  $L_r = 94$  cm hacia valores entre 3 y 5 [Pas90].

La conclusión que se desprende de este tratamiento de datos es que para las longitudes de resonador más pequeñas hay una mezcla de señales de origen caótico determinista y otra más próxima a un ruido aleatorio, de forma que el algoritmo G-P no converge, y sin embargo el espectro promedio muestra una clara estructura. Hemos de tener en cuenta que justamente en este caso es cuando las fluctuaciones son de menor amplitud, y por lo tanto más sensibles a cualquier fuente de ruido blanco



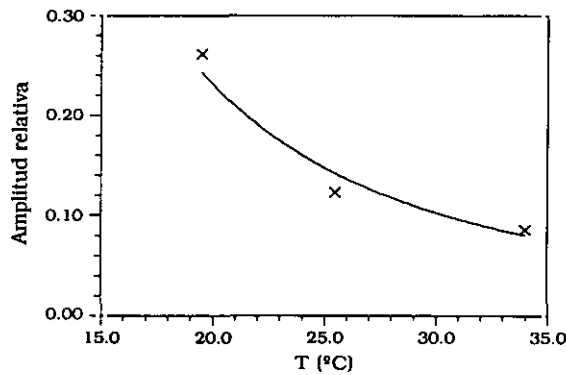
residual que puede destruir más eficazmente la coherencia implícita en las señales caóticas, que a pesar de ser irregulares proceden de un sistema determinista. Para longitudes del resonador progresivamente mayores, la componente caótica determinista va dominando sobre el ruido.

El alineamiento del resonador es un parámetro que influye de manera notable en la amplitud de las fluctuaciones irregulares observadas, pero no en el espectro promedio de las mismas (dentro del rango en que ha sido variado). Un desalineamiento del espejo de reflexión total de 7 mrad es suficiente para hacerlas desaparecer, por lo que, salvo mención expresa de lo contrario, siempre se ha alineado el láser de forma cuidadosa antes de tomar series de medidas. A nuestro juicio está claro que una de las fuentes de error en la estimación de los parámetros estadísticos de las fluctuaciones son las variaciones en el alineamiento y/o el desajuste del mismo a lo largo de series prolongadas de medidas.

El efecto del desalineamiento del resonador sobre la amplitud de las fluctuaciones se puede explicar cualitativamente como debido al aumento de las pérdidas inducido por el mismo, lo que aumentaría el umbral para la aparición de las fluctuaciones con una amplitud determinada. De todas formas hay que tener en cuenta también que el desalineamiento produce otros efectos, como por ejemplo una reducción drástica del número de tránsitos durante los que la radiación es resonante con la ganancia del medio activo, o una reducción del número de Fresnel del resonador  $F=(L\lambda)/a^2$  (íntimamente ligado a las pérdidas), por lo que un modelo cuantitativo que explicase la reducción de amplitud de las fluctuaciones habrá de tenerlos en cuenta.

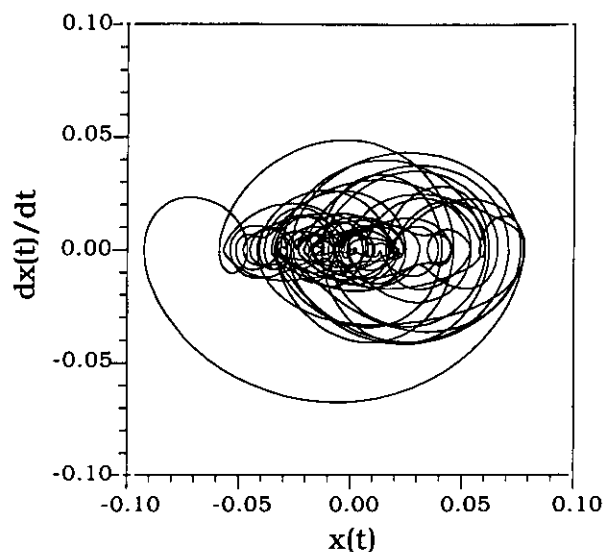
Un aspecto interesante del comportamiento de las fluctuaciones de intensidad es su dependencia de la temperatura. Un examen atento de las señales experimentales muestra que manteniendo las mismas condiciones geométricas y de excitación, el aumento de la temperatura provoca una disminución notable de la amplitud relativa de las fluctuaciones irregulares (figura 2.7). Este efecto es tanto más sorprendente cuanto que el rango de temperaturas explorado es bastante reducido (18-38°C). Al igual que ocurría con la variación de la longitud y el alineamiento del resonador, la estructura espectral promedio de las fluctuaciones tampoco varía al cambiar este parámetro de control. Se han llevado a cabo medidas sistemáticas de las fluctuaciones a tres temperaturas diferentes (19, 26 y 36°C), siendo en todas ellas la longitud del resonador de 74 cm y con el espejo de salida del 30% de reflectividad. La aplicación del algoritmo G-P a dichas señales muestra que el aumentar la temperatura no sólo disminuye la amplitud relativa de las fluctuaciones, sino que además añade una componente de ruido blanco que destruye muy eficientemente la coherencia implícita en las señales caóticas deterministas. Esto se observa claramente en la ausencia de convergencia de dicho algoritmo para las temperaturas más altas [Pas90]. Las razones por las que el aumento de la temperatura deba provocar una disminución de las

fluctuaciones no están claras, aunque se pueden apuntar algunas consideraciones, cualitativas por el momento, para su explicación. En primer lugar tenemos la sensibilidad de las mezclas de colorantes a la temperatura. Una  $T$  elevada aplicada durante periodos prolongados (unas horas) puede contribuir a una degradación notable del colorante, y por tanto a un cambio de sus propiedades como medio activo. Por otra parte el aumento de la temperatura se puede interpretar como una mayor agitación aleatoria de las moléculas del medio activo, que podría traducirse en un desfase más frecuente y aleatorio de los trenes de radiación emitidos por las mismas. Este aumento de la componente aleatoria explicaría cualitativamente la disminución observada, aunque es una explicación poco satisfactoria desde un punto de vista cuantitativo si se considera el cambio relativamente pequeño de temperatura necesario para producir el efecto.



**Figura 2.7.** Disminución de la amplitud relativa de las fluctuaciones al aumentar la temperatura.

Las fluctuaciones temporales medidas proceden pues de un sistema caótico determinista de (relativamente) pocos grados de libertad cuando  $L_r = 74$  ó  $94$  cm y se trabaja a las temperaturas más bajas de las estudiadas ( $17$ - $20^\circ\text{C}$ ), tal y como lo muestran los espectros de Fourier anchos y no repetitivos, las técnicas de reconstrucción del atractor y la aplicación del algoritmo G-P (figura 2.8). Un campo de investigación abierto por este trabajo es el encontrar modelos cuantitativos más generales que el de Lorenz-Haken aplicables a sistemas multimodo y que puedan explicar la fenomenología observada.



**Figura 2.8.** Reconstrucción del atractor subyacente a partir de una señal experimental.

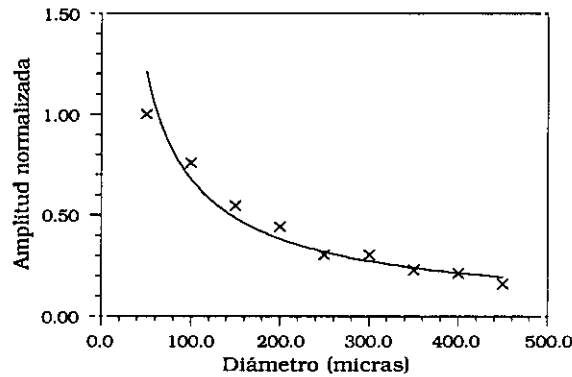
Seguramente la característica más interesante de las fluctuaciones irregulares que estudiamos es que no están correlacionadas en puntos de la sección transversal del láser separados por una distancia del orden de 0.2 mm o mayor (de ahí el nombre de fluctuaciones locales). Ha de tenerse en cuenta que el límite dado para la longitud de correlación es solamente una cota superior; se continúa investigando para refinar este valor, que posiblemente sea bastante menor que la cifra dada anteriormente.

El comportamiento de las fluctuaciones temporales al ir variando la abertura del diafragma exterior nos ha proporcionado una primera prueba del carácter local de la dinámica.

Los valores de los parámetros de control seleccionados para este experimento son los siguientes: concentración  $2.5 \cdot 10^{-5}$  molar de rodamina 6G en metanol, espejo de salida plano de reflectividad = 30 %, longitud del resonador = 74 cm, láser alineado, temperatura de la disolución entre 17 y 20 °C, sin diafragma intracavidad, tensión de excitación de la lámpara flash 9.5 kV y espejo de reflexión total plano.

La abertura del diafragma externo se varió desde 50  $\mu\text{m}$  a 450  $\mu\text{m}$  (de 50 en 50  $\mu\text{m}$ ) midiendo en cada caso la amplitud promedio de las fluctuaciones sobre la señal, promediando sobre conjuntos de veinte señales experimentales en cada caso. Los resultados se muestran en la figura 2.9, en la que se puede ver que la amplitud relativa de las fluctuaciones cae drásticamente al ir aumentando el diámetro del diafragma exterior. A partir de esta curva se ha obtenido la estimación de la longitud de correlación que citábamos más arriba. La interpretación más sencilla de este experimento es que *las fluctuaciones no tienen una correlación espacial*

apreciable para zonas del spot del láser separadas del orden de 0.2 mm. De este modo, la amplitud total de las fluctuaciones frente a la señal promedio irá disminuyendo paulatinamente al añadirse más contribuciones incoherentes. Obsérvese también que las dimensiones extremadamente pequeñas del área para la cual las fluctuaciones prácticamente han desaparecido frente al área total del spot del láser ( $A_{\text{fluctuaciones correlacionadas}} / A_{\text{spot}} \approx 0.5 \times 0.5 \text{ mm}^2 / 15 \times 15 \text{ mm}^2 \approx 10^{-3}$ ) hacen que sea imposible explicar este hecho por la composición modal del spot del láser (recordemos que por formar los modos transversales un conjunto ortonormal completo de funciones, al integrar sobre toda el área del spot las fluctuaciones debidas a términos cruzados procedentes de modos espaciales distintos deben desaparecer siempre, independientemente de si existe una dinámica local o no).



**Figura 2.9.** Disminución de la amplitud relativa de las fluctuaciones al aumentar el diámetro del diafragma exterior.

También hemos estudiado en este caso la variación del espectro promedio de las fluctuaciones en función de la abertura del diafragma externo. Para aberturas menores que 150  $\mu\text{m}$  el espectro promedio presenta la típica estructura con tres claras bandas de frecuencia centradas en 55, 110 y 165 MHz. Es notable que las frecuencias medias de dichas bandas estén entre sí en una relación armónica (1:2:3) a pesar de que sabemos que el espectro promedio no consta de picos estrechos, sino que es claramente de banda ancha, y ese ensanchamiento no puede proceder de otro sitio mas que de que los espectros individuales presentan sus picos distribuidos alrededor de dichas frecuencias promedio.

Para diafragmas de abertura mayor o igual a 200  $\mu\text{m}$  la forma del espectro promedio cambia de manera brusca, y pasamos a otra de banda muy ancha en la que no se aprecian picos discretos, salvo a la frecuencia de 165 MHz (véase la figura 8 de [Pas90]).

Para intentar obtener más información sobre la dinámica del láser al integrarla con diversas aberturas del diafragma externo, se ha aplicado el algoritmo G-P a seis señales

para cada uno de los tamaños de diafragma siguientes: 50, 150, 200 y 250  $\mu\text{m}$ . El análisis de los resultados muestra que en un 70 % de los casos estudiados existe convergencia de la pendiente para valores entre 1.8 y 4.0, habiéndose llegado hasta una dimensión de recubrimiento (embedding) igual a doce. En el resto de los casos no se ha observado saturación. No se aprecia correlación sistemática entre el cambio de forma del espectro de Fourier promedio y la dimensión fractal estimada mediante el algoritmo G-P, ni tampoco entre el diámetro del diafragma externo y dicha dimensión [Pas90]. De lo anterior se deduce que las fluctuaciones temporales locales observadas proceden de un sistema dinámico caótico de relativamente baja dimensionalidad bajo condiciones bastantes generales; sin embargo, la dimensión fractal del atractor en el que evoluciona asintóticamente el sistema dinámico no se ha podido determinar con precisión, debido en parte al reducido número de puntos de muestreo de las señales.

Con la introducción de diafragmas intracavidad de diámetros variables se han explorado dos nuevos parámetros de control, el número de Fresnel y el bombeo, que afectan de manera drástica a la dinámica espacio-temporal del sistema. Las primeras observaciones realizadas con diafragmas de diámetro mayor o igual a 8 mm sugerían que el principal efecto producido por los mismos (manteniendo el bombeo constante) era una disminución de la amplitud de las fluctuaciones irregulares, pero sin cambiar su espectro ni sus características dinámicas. Una segunda serie de observaciones, en las que se usaron diafragmas hasta de 4 mm de diámetro, mostró una situación bastante más compleja. En concreto, para los diafragmas de diámetro más pequeño se observó que las fluctuaciones irregulares no aparecían junto con el efecto láser, sino que se daba una oscilación regular y de relativamente baja frecuencia (si las comparamos con las de las fluctuaciones irregulares). Sólo al ir aumentando el bombeo se superponen a dichas oscilaciones las fluctuaciones espaciotemporalmente irregulares. En caso de usar diafragmas de mayor diámetro, los umbrales para la aparición del caos espacio-temporal se hacen cada vez más próximos al umbral láser, con lo que se explican también las primeras observaciones realizadas. Podemos concluir por tanto que el número de Fresnel del resonador junto con una variación sistemática del bombeo es un parámetro de control que permite observar la transición entre un régimen dinámico perfectamente ordenado y el caos espacio-temporal muy desarrollado característico de este láser de colorantes. La ruta de la transición entre ambos regímenes dinámicos no se ha estudiado en detalle, pero las observaciones experimentales realizadas aportan el material básico para una línea de investigación muy activa en estos momentos, centrada en la elucidación de estos aspectos, así como en la construcción de modelos teóricos que den cuenta de las observaciones.

De todo lo expuesto anteriormente se deduce que en el láser de colorantes existe una dinámica irregular tanto en el aspecto temporal como en el espacial. La falta de correlación entre las oscilaciones irregulares procedentes de puntos espacialmente

muy próximos nos permite clasificar el fenómeno estudiado como caos espaciotemporal altamente desarrollado, con profundas analogías con la turbulencia de otros sistemas, como los fluidos, con los que los láseres mantienen analogías que según los resultados presentados son más que formales. El descubrimiento de esta fenomenología en la que los aspectos temporales y espaciales se imbrican profundamente, junto con las conexiones naturales de los resultados experimentales con otras áreas activas de la investigación de fenómenos no lineales (turbulencia, generación dinámica de patrones espaciales, etc) suponen quizá nuestra aportación más relevante al esclarecimiento de la dinámica de los láseres, que se han tenido durante cierto tiempo como el paradigma de la coherencia y el orden. Los mecanismos físicos responsables de este comportamiento no se han aclarado a nuestra entera satisfacción, pero hay un enfoque prometedor según el cual la emisión de radiación homogéneamente en toda la sección transversal del láser sería *inestable* frente a la formación de pequeños dominios (filamentos) que actuarían como microláseres, y que interaccionarían entre sí (véanse [Pas90] y [Eme86] para una discusión de este punto en relación con el láser de colorantes). De esta forma el caos espaciotemporal altamente desarrollado que se observa en la práctica se podría interpretar como el resultado de la interacción de multitud de pequeñas estructuras, cada una de las cuáles tiene una dinámica temporal caótica de relativamente baja dimensión. Este enfoque parece prometedor en el sentido de poder explicar a la vez la baja dimensión del caos temporal y la muy baja correlación transversa que medimos en nuestros experimentos.

## **CAPITULO 3**

### **ASPECTOS EXPERIMENTALES DE LAS FLUCTUACIONES ESPACIO-TEMPORALES DE INTENSIDAD EN EL LASER DE CO<sub>2</sub>**

#### **3.1. Descripción del sistema experimental**

En todos los experimentos descritos en este capítulo se ha usado un láser TEA (láser de funcionamiento a presión atmosférica de excitación transversal) de CO<sub>2</sub> pulsado, diseñado y construido enteramente en el Departamento de Óptica de la Facultad de Ciencias Físicas de la U.C.M. [Pas91], [Gue91]. En las referencias citadas se podrá encontrar una descripción detallada del mismo; nosotros nos vamos a referir solamente a aquellos aspectos necesarios para una comprensión clara del dispositivo experimental usado.

El láser consta de un resonador tipo Fabry-Pérot formado por dos espejos, uno cóncavo de radio de curvatura 10 m, que es el reflector total, y otro plano con coeficiente de reflexión del 60% y tratamiento antirreflectante en una de sus caras. El primero de ellos está fabricado en Si recubierto con una película de oro, mientras que el otro es de ZnSe. En algunos experimentos se ha usado un espejo plano de salida de ZnSe con coeficiente de reflexión 30% sin ningún tratamiento especial en sus caras. La longitud estándar del resonador es de 90 cm, longitud que se incrementó en algunos casos hasta 115 cm.

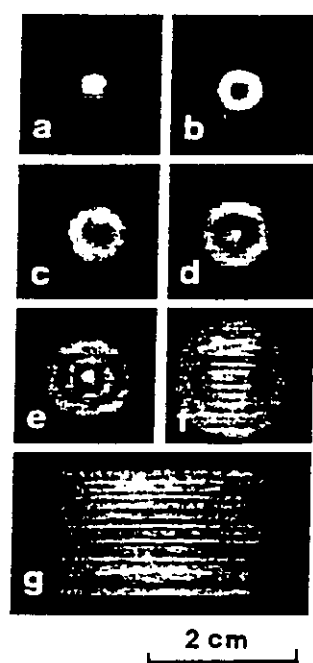
La mezcla de gases usada ha sido CO<sub>2</sub>:N<sub>2</sub>:He en proporciones 1:2:5 (en volumen). Solamente en un experimento destinado a estudiar la influencia de la composición de la mezcla en las fluctuaciones se usó CO<sub>2</sub>:N<sub>2</sub>:He en proporciones 1:2:10.

La excitación de la mezcla se produce por una descarga difusa entre dos electrodos con perfil de Ernst, de longitud 67 cm y separados por 2 cm. El condensador principal de almacenamiento de energía es de 100 nF, cargándose siempre a una tensión de 30 kV. Junto con éste se usa otro directamente acoplado a la cámara de descarga de capacidad 8 nF, y un disruptor controlado (interruptor que funciona mediante una descarga eléctrica disruptiva en un cierto gas) de aire para asegurar un tiempo de subida corto para el pulso de voltaje en los electrodos.

El láser funciona en régimen pulsado, con una energía por pulso del orden de 7 J y

una potencia de pico aproximada de  $10 \text{ Mw/cm}^2$ . La forma temporal del pulso láser es un primer pico muy intenso (denominado pico de conmutación de ganancia, abreviado PCG) de duración aproximada  $50 \text{ ns}$  seguido de una cola de decaimiento mucho más lento (unos  $3 \mu\text{s}$ ) debida a la transferencia de excitación por colisiones desde las moléculas de  $\text{N}_2$  a las de  $\text{CO}_2$ : es la llamada cola de transferencia colisional (CTC). En ausencia de diafragma intracavidad o de cualquier otro elemento de selección transversal y/o axial de modos, tanto en el pico de conmutación de ganancia como en la cola de transferencia colisional se presentan oscilaciones altamente irregulares de la intensidad luminosa, de amplitud no despreciable en comparación con la intensidad media.

La estructura transversal del haz láser (en ausencia de diafragmas intracavidad) está compuesta por un spot rectangular de  $30 \times 20 \text{ mm}^2$ , dividido en finas bandas longitudinales alternativamente más o menos intensas, y de anchura aproximada  $1.4 \text{ mm}$  (figura 3.1(g)).



**Figura 3.1.** Patrones transversales de intensidad del láser de  $\text{CO}_2$  al variar el diámetro de un diafragma intracavidad colocado junto al espejo de reflexión total. De (a) a (f)  $\phi = 10, 12, 14, 16, 20 \text{ mm}$  y (g) sin diafragma.

Esta estructura transversal sugiere que en condiciones normales el láser opera en modos transversales de orden alto. De hecho el número de Fresnel del resonador es bastante grande ( $N_f=11$ ), y si además tenemos en cuenta las condiciones de contorno impuestas por los electrodos no debiera resultar extraña la forma del spot. Como se describirá con detalle más adelante, la estructura transversal del láser se puede hacer



mucho más simple introduciendo diafragmas intracavidad adecuados. Así por ejemplo, la introducción de un diafragma intracavidad circular de 8 mm de diámetro cerca del espejo de reflexión total hace que el láser oscile en el modo transversal fundamental  $TEM_{00}$  (figura 3.1(a)).

Los pulsos del láser se midieron con detectores del tipo "arrastre de fotones" ("photon drag"), basados en el efecto Compton producido por los fotones de  $10.6\ \mu\text{m}$  sobre los electrones móviles de un cristal ultrapuro de germanio. Los fotones transmiten su momento a los electrones, que dan lugar a una corriente macroscópica que es posteriormente detectada. Estos detectores gozan de una sensibilidad razonablemente buena, funcionan a temperatura ambiente y son rápidos, con tiempos de subida típicos menores de 1 ns, todo lo cual los hace casi ideales para la medición de las fluctuaciones que estudiamos.

Las señales procedentes de los detectores se registran (al igual que en el caso del láser de colorantes) con un digitalizador programable de transitorios (Tektronix 7912 AD) con impedancia de entrada de  $50\ \Omega$ . Todo el equipamiento electrónico de detección y registro de la señal se colocaron dentro de una cámara de Faraday para evitar la interferencia radioeléctrica. En los experimentos de correlación cruzada, en los que se detecta la evolución temporal de dos pequeñas zonas del haz del láser, se usaron dos detectores y dos digitalizadores de transitorios Tektronix 7912 AD.

En los experimentos llevados a cabo en el PCG se usó una combinación de diafragma, atenuadores y una lente de ZnSe para enfocar áreas de la sección recta progresivamente mayores sobre el detector para averiguar cómo cambiaba la estructura de las fluctuaciones al hacer esto.

Pasamos enseguida a la siguiente sección, en la que veremos cuáles han sido los parámetros de control que se han variado para intentar esclarecer el origen de las fluctuaciones observadas.

### **3.2. Parámetros de control del láser de $CO_2$**

Para intentar averiguar el origen de las fluctuaciones observadas hemos variado, de forma más o menos sistemática, algunos de los parámetros de control de nuestro láser. Entre ellos destacaremos:

- 1) Área del haz láser integrada (o detectada) en el detector de arrastre de fotones.
- 2) Diámetro del diafragma intracavidad circular colocado junto al espejo de reflexión total.
- 3) Longitud de la cavidad resonante.
- 4) Reflectividad del espejo de salida.

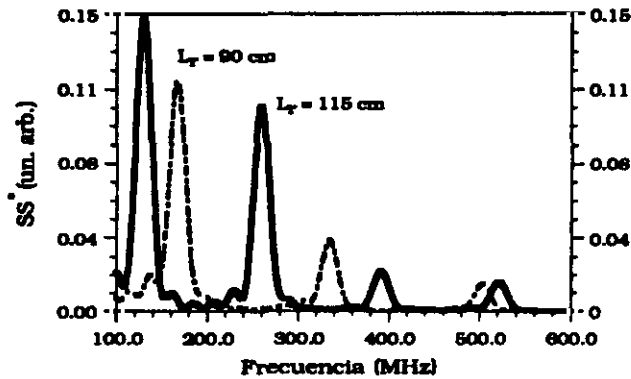
### 5) Composición de la mezcla activa.

En cuanto a 1), aunque no se trata en realidad de un parámetro de control (*no influye* en la dinámica del láser la menor o mayor área del haz detectada), lo hemos incluido porque nos proporciona una primera evidencia del carácter local de las fluctuaciones, es decir, del hecho de su falta de correlación espacial para distancias entre puntos de la sección recta del haz separados unos pocos milímetros. En secciones posteriores (véanse §§ 3.4, 3.5) describiremos un experimento de correlación cruzada que prueba ésto de manera directa y muy gráfica.

Mediante una combinación adecuada de atenuadores, diafragma y una lente de ZnSe podemos enfocar sobre el detector áreas de diferente tamaño del haz del láser, y comprobar en cada caso cómo dependen las fluctuaciones de dicho tamaño. Este experimento se ha llevado a cabo de forma sistemática en el PCG, con áreas del haz integradas iguales a 500, 144, 42, 9, 2 y 0.6 mm<sup>2</sup>. Adelantando un poco la discusión de la sección 3.4 diremos que para 500 mm<sup>2</sup> sólo se observa una oscilación regular debida al batido axial de modos, mientras que para áreas de 9 mm<sup>2</sup> o menores aparecen fluctuaciones altamente irregulares, de amplitud comparable a la señal promedio.

El parámetro de control fundamental en los experimentos con el láser de CO<sub>2</sub> ha sido sin duda el diámetro del diafragma intracavidad circular introducido junto al espejo de reflexión total para la selección de modos (deberíamos decir *estructuras* para mayor precisión) transversales. Se han empleado diafragmas de teflon de diámetros  $\phi = 6, 8, 10, 12, 14, 16$  y 20 mm, estudiándose en cada caso la estructura de las fluctuaciones tanto en el PCG como en la CTC. Al ir variando sistemáticamente el diámetro desde valores pequeños (6 mm) hasta  $\phi = 20$  mm hemos podido comprobar cómo cambia la dinámica desde un régimen ordenado hasta uno caótico (en el sentido técnico del término). La descripción de estos experimentos será el objeto de las secciones 3.4 y 3.5. El resto de los parámetros de control referidos se ha explorado sólo para comprobar si influían de manera apreciable en la estructura estadística de las fluctuaciones irregulares observadas en el pico de conmutación de ganancia. Al comprobarse que no influían de forma significativa, se mantuvieron fijos en el resto de los experimentos en los valores  $L_r = 90$  cm,  $R = 60$  %, mezcla CO<sub>2</sub>:N<sub>2</sub>:He = 1:2:5.

En la figura 3.2 podemos apreciar que al variar la longitud de la cavidad, y observando con el detector el haz completo, los picos en frecuencia correspondientes a cada longitud se sitúan en posiciones dadas por la fórmula  $\nu_n^{(i)} = nc/2L^{(i)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $i$  es el índice que denota las distintas longitudes del resonador que se han estudiado), lo que demuestra que las oscilaciones regulares observadas en este caso corresponden a un puro batido axial de modos longitudinales (acoplo en fase de los mismos).



**Figura 3.2.** Las fluctuaciones ordenadas de todo el spot del láser de CO<sub>2</sub> corresponden al batido de los modos longitudinales, como lo muestra el que las frecuencias de las mismas sigan la ley  $\nu_n = nc/2L$ .

Para comprobar si los parámetros de control 3), 4) y 5) influían de manera significativa en la estructura de las fluctuaciones irregulares se registraron 40 pulsos en el PCG en cada una de las condiciones siguientes:

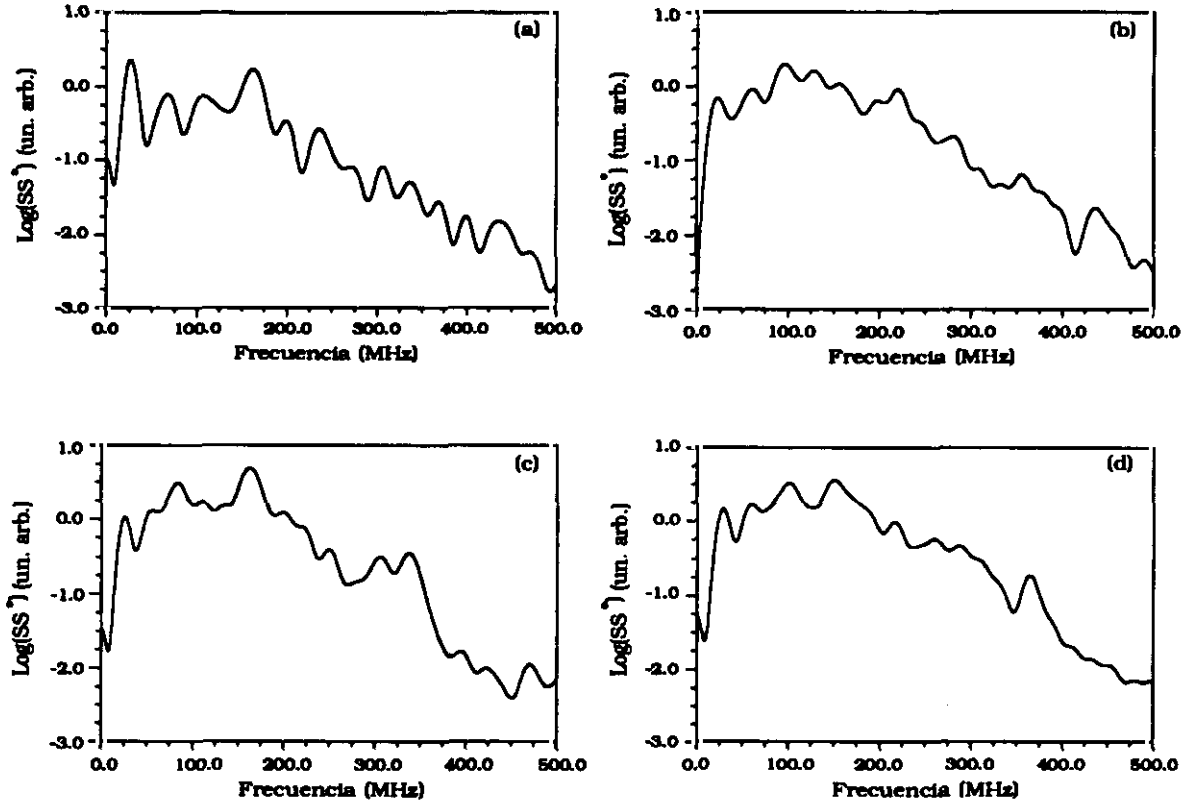
- a) Area del haz integrada en el detector = 3 mm<sup>2</sup>,  $L_r = 90$  cm,  $R = 60\%$ , mezcla 1:2:5, sin diafragma intracavidad.
- b) Area del haz integrada en el detector = 3 mm<sup>2</sup>,  $L_r = 115$  cm,  $R = 60\%$ , mezcla 1:2:5, sin diafragma intracavidad.
- c) Area del haz integrada en el detector = 3 mm<sup>2</sup>,  $L_r = 90$  cm,  $R = 60\%$ , mezcla 1:2:10, sin diafragma intracavidad.
- d) Area del haz integrada en el detector = 3 mm<sup>2</sup>,  $L_r = 90$  cm,  $R = 30\%$ , mezcla 1:2:5, sin diafragma intracavidad.

El resultado fue que en los casos (a)-(d) el espectro de Fourier promedio se mostró insensible a las variaciones introducidas en los parámetros de control correspondientes, de lo cual deducimos que éstos no influyen de una forma apreciable en las propiedades estadísticas de las fluctuaciones. Como podemos ver tenemos en este caso una situación análoga a la que ocurría en el láser de colorantes, en la que asimismo los espectros promediados son insensibles a cambios sustanciales de los parámetros geométricos del resonador o la concentración de la mezcla activa. Vemos en la figura 3.3 los espectros en las condiciones (a)-(d).

Para extraer las fluctuaciones del pulso láser completo hemos empleado la técnica ya descrita en el caso el láser de colorantes (§ 2.3.1), con la única diferencia de que la normalización empleada para separar las fluctuaciones ha sido

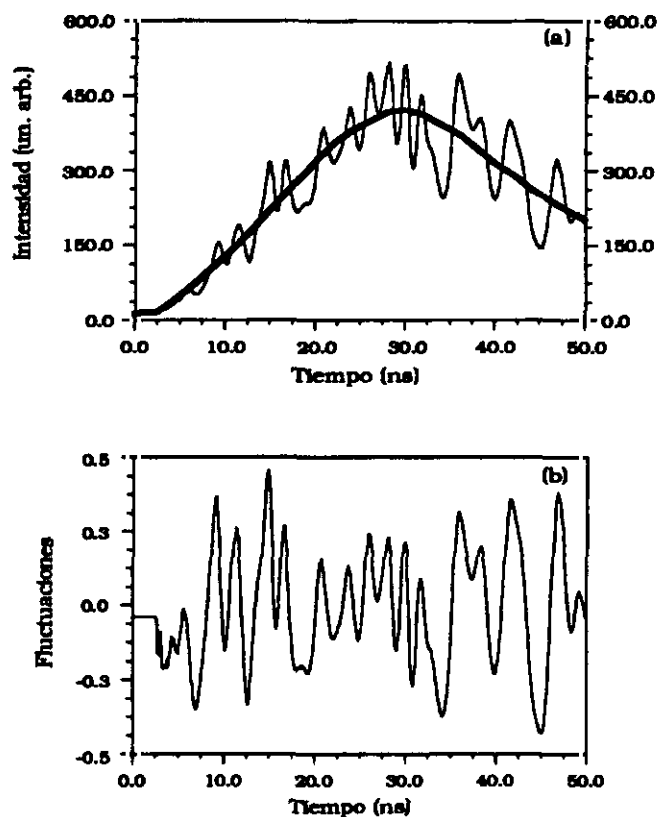
$$\phi(t) = \frac{f(t) - f_{lenta}(t)}{f_{lenta}(t)} \quad (3.1)$$

, calculándose a partir de  $\phi(t)$  los espectros de la figura 3.3.



**Figura 3.3.** Invariancia de los espectros de Fourier promediados al cambiar algunos de los parámetros de control.

La normalización (3.1) compensa en parte la menor amplitud de las fluctuaciones cuando la amplitud del pulso láser es menor, haciendo que las fluctuaciones sean más aproximadamente estacionarias (figura 3.4) [Pas91a].



**Figura 3.4.** Aplicación del algoritmo de filtrado de bajas frecuencias a una señal experimental obtenida con el láser de  $\text{CO}_2$ . (a) la línea de trazo fino es la señal medida, la de trazo grueso es la obtenida con el algoritmo de filtrado. En (b) se representan las fluctuaciones obtenidas según la fórmula (3.1).

### 3.3. Estructura axial-transversal de los modos del resonador. Particularización al láser de $\text{CO}_2$

Es bien conocido el papel fundamental que tiene el resonador óptico en las propiedades espaciales y temporales de la radiación láser. Es el resonador, en última instancia, quien configura la distribución transversal de campo y de energía y de su divergencia angular, y quien impone (junto con la anchura de línea del medio activo) el número de modos axiales que van a resonar, así como restricciones a las posibles frecuencias de oscilación dentro de la anchura de ganancia del medio material.

Salvo que se introduzcan modificaciones en el diseño de los láseres, éstos son por lo general osciladores multimodales tanto axial como transversalmente, pues de esta manera pueden hacer un uso óptimo de la inversión de población existente, convirtiéndola en energía radiante.

Los modos propios del resonador son autoestados de la cavidad, esto es, configuraciones estacionarias de campo que reproducen su forma en un tránsito de ida y vuelta en la cavidad.

El cálculo de los modos propios se realiza resolviendo la ecuación de ondas para el campo electromagnético dentro del resonador vacío, lo cual conduce a problemas de condiciones de contorno (periódicas, tipo Dirichlet, etc) en ecuaciones en derivadas parciales lineales. Debido a su enorme importancia práctica y a su aparición en los campos más variados de la Física estos problemas han sido tratados extensamente y existe una abundante literatura sobre los mismos.

Para nuestros propósitos en esta memoria nos bastará saber que en el caso de resonadores tipo Fabry-Pérot (medio activo confinado entre dos espejos planos, o entre uno plano y otro curvo en el caso que nos ocupa) existe un conjunto infinito numerable de autoestados designados simbólicamente por la notación  $TEM_{qnm}$  (modos electromagnéticos transversales), donde  $q$  denota el modo longitudinal y  $n$  y  $m$  el modo transversal correspondiente. Dichos autoestados son un conjunto completo de autofunciones ortogonales y normalizadas, y por lo tanto cualquier distribución de campo en el resonador se puede escribir como un desarrollo en serie de dichas funciones. Simbólicamente

$$E = \sum_{qnm} a_{qnm} T_{qnm} \quad (3.2).$$

Las cavidades resonantes que se usan habitualmente en los láseres suelen ser largas comparadas con sus dimensiones transversales por lo que el índice  $q$  suele ser alto, mientras que  $n$  y  $m$  son números enteros pequeños. Un resultado importante de la teoría de modos en resonadores láser es la separación en frecuencia entre dos modos caracterizados por distintos valores de los índices  $qnm$

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} (\Delta q + \Delta(n+m+1) \frac{\arccos \sqrt{\pm(g_1 g_2)}}{\pi}) \quad (3.3)$$

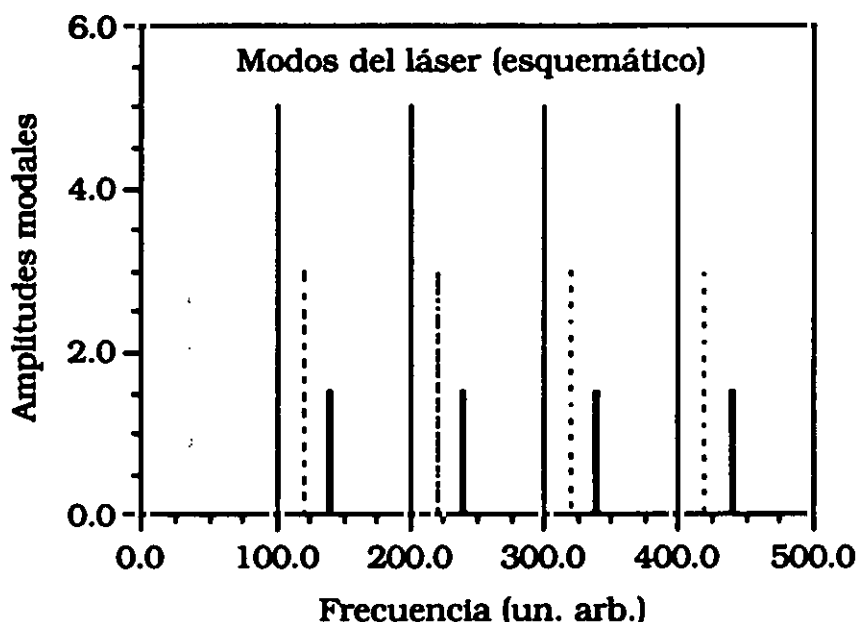
con  $c$  la velocidad de la luz en el vacío,  $L$  la longitud óptica de la cavidad y  $g_i = 1 - L/R_i$ , siendo  $R_i$  el radio de curvatura del espejo correspondiente. Es interesante mencionar algunas consecuencias elementales de (3.3). Así por ejemplo en el caso en que ambos espejos del resonador sean planos (3.3) se reduce a

$$\Delta\nu(\text{Fabry - Pérot}) = \frac{c}{2L} \Delta q \quad (3.4)$$

y por lo tanto la separación en frecuencia de los modos depende únicamente del índice axial  $q$ , o dicho con otras palabras, todos los modos transversales correspondientes a un índice axial fijo son degenerados en frecuencia.

En el caso de espejos de gran radio de curvatura ( $L \ll R$ ) el segundo término del miembro de la derecha de (3.3) supone una pequeña corrección a (3.4), pero es suficiente para romper la degeneración en frecuencia de los modos transversales, y esto, como veremos más adelante, puede tener consecuencias importantes en la dinámica espacio-temporal de los láseres.

En la figura 3.5 vemos de manera esquemática la estructura de modos en un resonador láser largo comparado con sus dimensiones transversales, y con espejos de gran radio de curvatura.



**Figura 3.5.** Esquema de la estructura de modos en un resonador láser.

En el caso del láser de  $\text{CO}_2$  estudiado, en las condiciones habituales de trabajo, no se ha introducido ningún elemento que permita seleccionar el número de modos *axiales* que oscilan simultáneamente, por lo cual nuestro sistema trabaja siempre como un oscilador multimodal axial. El número máximo de modos axiales que pueden oscilar o estar presentes simultáneamente se puede determinar contando el número de modos resonantes de la cavidad que caen dentro de la anchura de ganancia de la transición láser. Dicha anchura depende fundamentalmente de la presión y composición de la mezcla y vale en nuestro caso  $\Delta\nu = 2.5\text{-}3.0$  GHz.

Por otra parte la separación entre modos axiales (suponiendo los índices transversales fijos) es 167 MHz para nuestro caso en que  $L = 0.9$  m ( $\Delta\nu_{ax} = c/2L$ ).

De todo lo dicho se deduce que en la anchura colisional de la transición láser caben aproximadamente 15 modos, y éste será por tanto el número aproximado de los que oscilen simultáneamente en nuestro resonador.

La estructura de modos transversales del láser se puede controlar de manera sencilla y reproducible insertando en el resonador, cerca del espejo de reflexión total, diafragmas de diámetros variables. Cuando el diafragma no está presente, el patrón transversal del láser está formado por finas bandas alternativamente más o menos brillantes de anchura 1.4 mm, lo que sugiere que funciona en modos altos. Esta conclusión se puede cuantificar calculando el número de Fresnel del resonador,  $N_f \approx 11$  en nuestro caso. Dicho número nos da una aproximación del número máximo de modos transversales que oscilan simultáneamente.

Sin embargo para diámetros del diafragma intracavidad menores o iguales a 8 mm, el láser oscila en el modo transversal fundamental  $TEM_{00}$  caracterizado por una distribución de potencia gaussiana. A medida que vamos aumentando progresivamente la abertura del diafragma se va haciendo posible que oscilen nuevos modos transversales, haciéndose el patrón espacial de intensidad más complejo. En la figura 3.1 vemos las impresiones producidas por el haz láser en campo próximo sobre papel charol negro al ir variando el diámetro del diafragma, observándose de forma muy gráfica cómo evoluciona y se complica el patrón de intensidad a medida que se incorporan nuevos modos.

Para concluir, nuestro láser funciona como un oscilador multimodo axial (con un promedio de unos 15 modos presentes simultáneamente) cuya estructura transversal de campo se puede controlar introduciendo un diafragma intracavidad de diámetro variable. En ausencia de dicho diafragma selector el láser funciona como un oscilador multimodo axial-transversal.

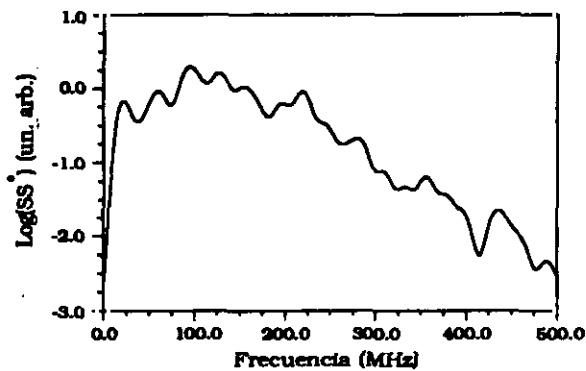
### **3.4. Dinámica del láser de CO<sub>2</sub> en el pico de conmutación de ganancia (PCG)**

Vamos a comenzar nuestro estudio de la dinámica del láser de CO<sub>2</sub> describiendo el comportamiento observado en el pico de conmutación de ganancia, que es la primera radiación que aparece unos 200 nanosegundos después de que se alcance el primer máximo de la corriente en el circuito de excitación de los electrodos. Así pues, lo que observamos en el PCG son los primeros estadios de la evolución dinámica del láser. Al complementar estas medidas con las tomadas en la cola cuasiestacionaria de transferencia colisional hemos estudiado la dinámica desde su origen transitorio hasta



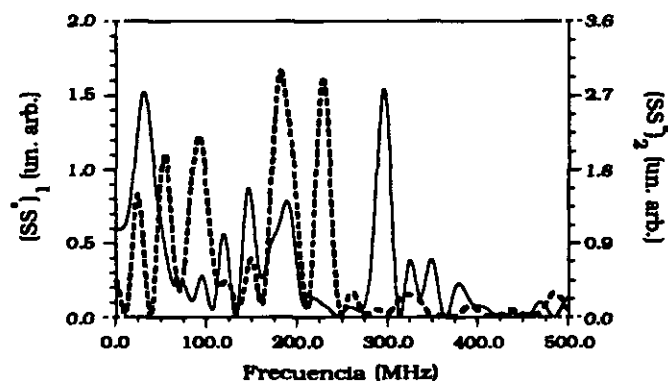
su estado estacionario final, por lo que no sólo hemos caracterizado el segundo, sino que hemos descubierto, en tiempo real, cuáles son los mecanismos que generan y alimentan las inestabilidades observadas.

Midiendo la intensidad del láser en campo próximo y de forma local ( $\text{Area}_{\text{detector}} = 3 \text{ mm}^2$ ), en ausencia de elementos selectores intracavidad, se observa que la emisión está caracterizada por unas modulaciones (oscilaciones) irregulares de gran amplitud, cuyo espectro de Fourier promedio (calculado con 40 realizaciones, todas ellas en las mismas condiciones experimentales) es ancho, sin trazas reconocibles de picos discretos y que se extiende al menos hasta frecuencias de aproximadamente 500 MHz (figura 3.6).



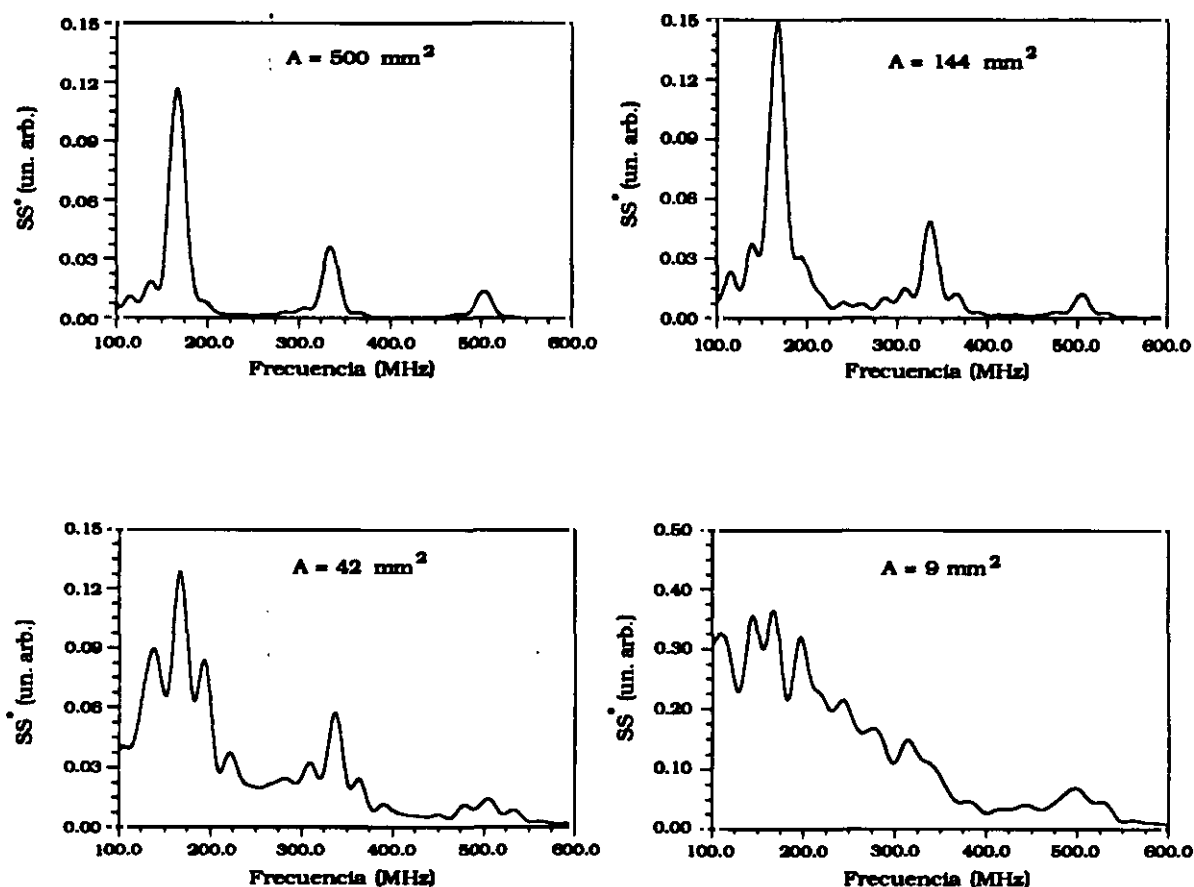
**Figura 3.6.** Espectro de Fourier promediado, correspondiente a las fluctuaciones irregulares del pico de conmutación de ganancia.

Los espectros de Fourier de las fluctuaciones son distintos de disparo a disparo, no tan sólo en la altura relativa de los picos de frecuencia, sino también en la posición y el número de los mismos (figura 3.7).



**Figura 3.7.** Espectros de las fluctuaciones de intensidad correspondientes a dos pulsos distintos del láser, manteniendo los parámetros de control constantes.

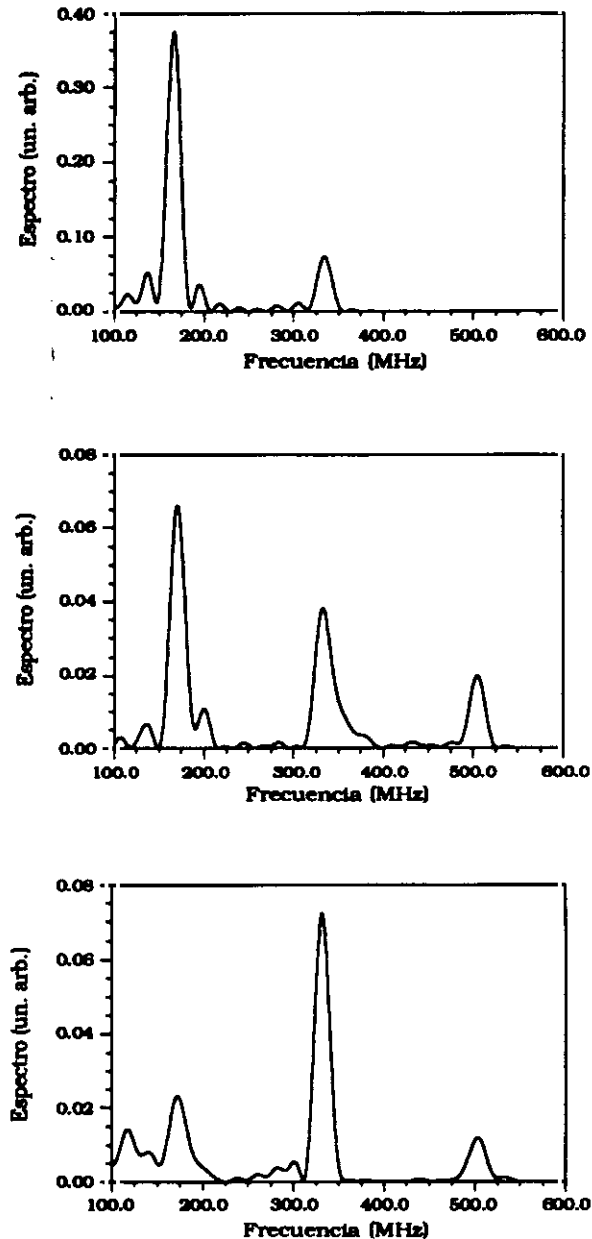
El primer experimento que se llevó a cabo para intentar esclarecer si las fluctuaciones eran o no espacialmente coherentes consistió en registrar en el detector áreas progresivamente mayores de la sección recta del láser, usando para ello una combinación de atenuadores, diafragmas y una lente de ZnSe. Este experimento estaba inspirado en otro similar realizado en el láser de colorantes y descrito en § 2.4, en el cual vimos cómo las fluctuaciones disminuían notablemente de amplitud al integrar sobre el fotodiodo una zona de diámetro aproximado 0.5 mm. La idea subyacente a ambos experimentos es que si efectivamente el sistema láser en cuestión está oscilando de forma irregular en el tiempo, y además lo hace de manera distinta y no correlacionada en diferentes zonas espaciales, entonces al integrar sobre un detector un área relativamente grande en comparación con el área en la que las fluctuaciones tengan una coherencia apreciable, éstas deberían cancelarse entre sí, y obtenerse una señal mucho más suave.



**Figura 3.8.** Variación del espectro de Fourier de las fluctuaciones al integrar en el detector áreas progresivamente mayores del haz del láser.

En la figura 3.8 vemos cómo varía el espectro de Fourier promedio al ir focalizando en el detector áreas progresivamente mayores del spot del láser, desde  $A = 0.6 \text{ mm}^2$ , hasta  $A = 500 \text{ mm}^2$ . Se observa que para áreas detectadas mayores o iguales a  $42 \text{ mm}^2$  la forma del espectro promedio cambia sustancialmente, desde una estructura ancha sin picos reconocibles en frecuencia a un puro batido axial de modos para  $A = 500 \text{ mm}^2$ .

En este caso, las fluctuaciones de intensidad son completamente regulares, aunque distintas de disparo a disparo, lo que muestra que los acoplos de modos se establecen con diferentes fases relativas (pero constantes en el tiempo) en cada pulso (figura 3.9).



**Figura 3.9.** Espectros de Fourier de las oscilaciones debidas al batido de modos, que muestran que los acoplos modales cambian de disparo a disparo.

A diferencia de lo que ocurre cuando observamos las fluctuaciones de forma local, las amplitudes de los picos en el régimen de batido de modos difieren de disparo a disparo, pero su posición es siempre la misma, y está caracterizada por las relaciones  $v_n = n \Delta v$ ,  $\Delta v = c/2L$ .

Como hemos señalado anteriormente, para áreas integradas del orden de  $50 \text{ mm}^2$  o mayores se observa claramente el batido regular axial de modos, de forma que las fluctuaciones irregulares se cancelan cuando se integran áreas de este orden. Dado que  $50 \text{ mm}^2 \ll 500 \text{ mm}^2$  (área total de la sección recta del láser) no se puede atribuir esta cancelación de las fluctuaciones irregulares a un simple efecto de ortogonalidad de modos transversales, dado que en ese caso sólo se obtendría la cancelación de las fluctuaciones al extender la integración a toda el área de la sección recta del haz.

Precisamos a continuación el argumento anterior. Si los modos transversales de la cavidad forman un sistema ortonormal completo, un campo arbitrario que oscilara en régimen de acoplo de fase axial-transversal podrá descomponerse siempre según la expresión

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \sum_{qnm} c_{qnm} \vec{u}_{qnm}(\vec{x}) e^{i(\omega_{qnm} t + \phi_{qnm})} \quad (3.5)$$

, por lo tanto la intensidad recibida en un detector cuadrático (sensible a la intensidad de la radiación) será

$$\begin{aligned} I &\propto \iint_A \vec{E} \vec{E}^* dS = \iint_A \sum_{qnm} \sum_{q'n'm'} c_{qnm} c_{q'n'm'}^* \vec{u}_{qnm} \vec{u}_{q'n'm'}^* e^{i[(\omega_{qnm} - \omega_{q'n'm'})t + (\phi_{qnm} - \phi_{q'n'm'})]} = \\ &= \sum_{qnm} \sum_{q'n'm'} c_{qnm} c_{q'n'm'}^* e^{i[(\omega_{qnm} - \omega_{q'n'm'})t + (\phi_{qnm} - \phi_{q'n'm'})]} \iint_A \vec{u}_{qnm} \vec{u}_{q'n'm'}^* dS = \sum_{qnm} |c_{qnm}(t)|^2 \end{aligned} \quad (3.6).$$

A partir de (3.6) resultan evidentes dos cosas: una que si  $A = A_{\text{haz láser}}$  las integrales de superficie se transforman en deltas de Kronecker y por tanto la intensidad total es igual a la suma de las intensidades de los modos parciales que entran en la suma (3.6), sin influencia de los términos de batido intermodales, y la otra que si  $A \ll A_{\text{haz láser}}$  las integrales dobles de (3.6) no tienen porqué anularse (al menos no se anulan desde luego debido a la ortogonalidad de los modos), y por lo tanto sería de esperar la existencia de términos cruzados debidos a batidos transversales de modos. En consecuencia, la supresión de las fluctuaciones irregulares al integrar zonas de la sección recta de área mucho menor que el área total es una prueba bastante concluyente de que tales fluctuaciones están descorrelacionadas para distancias tales que  $d \sim (4A/\pi)^{1/2}$ , con  $A$  del orden  $50 \text{ mm}^2$ , es decir  $d$  aproximadamente  $7 \text{ mm}$ . Por

tanto dicho efecto de anulación de las fluctuaciones irregulares al integrar sobre áreas mucho menores que el área total del haz láser no se puede atribuir simplemente a una anulación debida a la ortogonalidad de los modos transversales, ya que para que este argumento sea válido es necesario que  $A_{\text{integración}} = A_{\text{haz}}$ . Como veremos más adelante, la estimación de la longitud de correlación de las fluctuaciones obtenida con el experimento anterior está en muy buen acuerdo con otra obtenida por el procedimiento directo de medir las fluctuaciones temporales simultáneamente en dos puntos distintos y calcular la correlación cruzada de las mismas.

Antes de medir las fluctuaciones en dos puntos simultáneamente, se realizó otro experimento (indirecto) de correlación cruzada que consistió en lo siguiente. Dispusimos cuatro placas intercambiables de cobre de 1 mm de espesor y  $4 \times 4 \text{ cm}^2$  en las que se taladraron sendos agujeros de 1 mm de diámetro y con una separación entre los centros de los mismos de 10, 7, 4 y 1.5 mm respectivamente. Estas placas se colocaron frente al espejo de salida del láser, ligeramente inclinadas para evitar posibles retroreflexiones, con la línea que unía los centros de los taladros paralela a las bandas horizontales de que se compone el patrón transversal del láser. La radiación proveniente de los dos agujeros se hizo incidir sobre la superficie de un detector de arrastre de fotones de 11.5 mm de diámetro y se midió la señal correspondiente. A modo de referencia se utilizó una placa de cobre con un único taladro de diámetro 1.4 mm, de manera que el área de la sección del láser interceptada fuera la misma que en el caso de utilizar dos agujeros de 1 mm de diámetro. Con esta disposición los pinceles de radiación procedentes de los dos taladros inciden en zonas del detector que no solapan entre sí, y lo que estamos haciendo por tanto es un experimento de interferencia de intensidad, o dicho de otra forma, la respuesta del mismo será proporcional a  $I_1(t) + I_2(t)$  ( $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$ : intensidades que atraviesan los agujeros). Dadas las características geométricas del detector utilizado (área sensible de unos  $104 \text{ mm}^2$  y 11.5 mm de diámetro) es posible asegurar en todos los casos que los pinceles de radiación inciden sobre áreas que no se solapan del mismo, por lo que el experimento es totalmente limpio en su interpretación, y su fundamento es sólido. En cualquier caso, los resultados obtenidos con él están en muy buen acuerdo con otras estimaciones independientes de la longitud de correlación, y por ello nos detenemos con algún detalle en él.

Evidentemente, si suponemos como hipótesis de partida que dos puntos relativamente alejados uno del otro oscilan de forma irregular y además no correlacionada entre sí, es de esperar que al hacer un promedio estadístico sobre realizaciones de la suma de intensidades correspondientes a dichos puntos la contribución de las oscilaciones irregulares frente a la señal promedio se reduzca con respecto al caso en el que observamos un solo punto, dado que en la suma habrá cierta compensación de máximos y mínimos de intensidad. Consideraciones

elementales de continuidad indican que para distancias entre agujeros mucho menores que la longitud de correlación ambos puntos oscilarán de forma espacialmente coherente, aunque irregular en el tiempo, pero que si efectivamente hay una falta de correlación debida a la dinámica, ésta se observará al ir aumentando la separación entre ambos puntos. Si por el contrario los dos puntos estudiados oscilan espacialmente de forma coherente para cualquier valor de la separación entre los mismos, no se debería observar ningún efecto (en términos estadísticos) de reducción de las fluctuaciones frente al promedio al sumar las intensidades. Así pues lo que pretendemos probar con el experimento es cuál de las dos situaciones descritas anteriormente se ve favorecida empíricamente.

Antes de presentar los resultados obtenidos vamos a describir el estimador adimensional de la amplitud (señal-irregular)/(señal-promedio) que hemos empleado.

Para cada valor de la distancia de separación entre los agujeros hemos tomado veinte pulsos, manteniendo todos los parámetros de control constantes. A partir de cada uno de los pulsos (denominado  $s(t)$ ) se ha calculado, con el método descrito en las §§ 2.3.1 y 3.2, el ajuste suave a dicho pulso,  $p(t)$  (véase también la figura 3.4). Con ésto se calcula el estimador  $\eta$  como sigue

$$\eta = \frac{k}{T} \int_0^T \left| \frac{s(t) - \overline{p(t)}}{\overline{p(t)}} \right| dt \quad (3.7)$$

donde

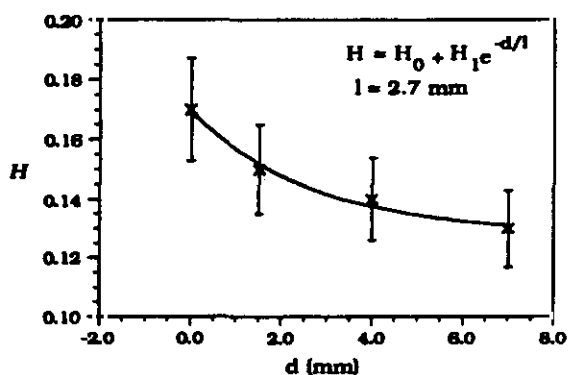
$$\overline{p(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (3.8)$$

y  $k$  es una constante arbitraria. Como es natural las integrales que aparecen en (3.7) y (3.8) se calculan de forma numérica a partir de los datos digitalizados. El estimador natural para el conjunto de realizaciones es

$$H = \langle \eta \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i \quad (N = 20) \quad (3.9)$$

En la figura 3.10 vemos cómo varía  $H$  con  $d$ .

Ajustando la curva experimental con la expresión  $H = H_0 + H_1 e^{-d/\lambda}$ , se obtiene para  $H_0$  el valor 0.13, y para  $\lambda$  2.7 mm.



**Figura 3.10.** Variación del estimador  $H$  en función de la separación entre dos puntos del haz del láser, lo que permite obtener una estimación de la longitud de correlación espacial de las fluctuaciones.

Quizá sea interesante notar que incluso para separaciones muy grandes no es de esperar que  $H$  tienda a cero, dado que, por definición,  $\eta$  es una cantidad positiva. De ahí la constante  $H_0$  en la fórmula de ajuste.

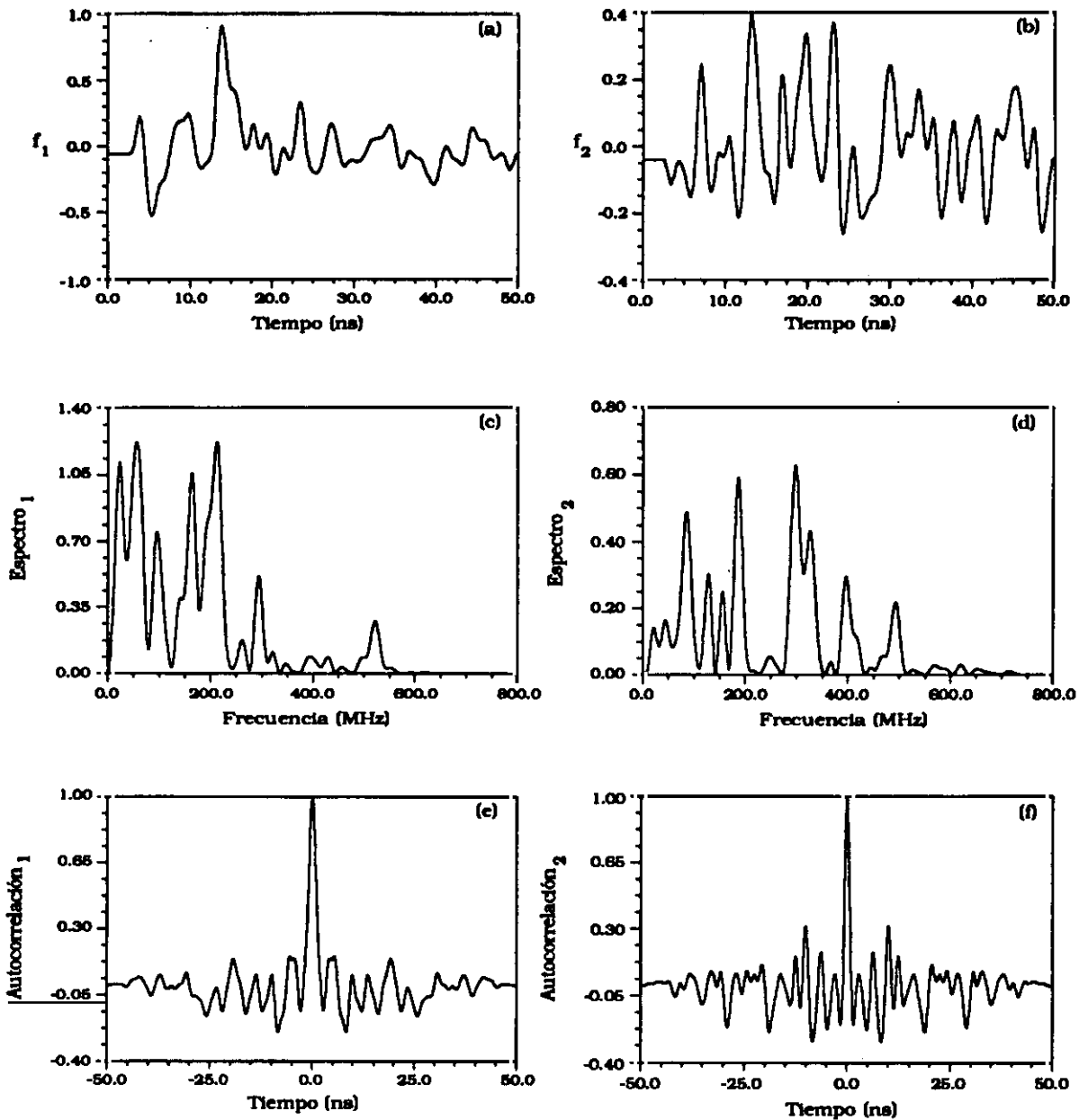
La disminución monótona de  $H$  en función de  $d$  refuerza la tesis de una descorrelación espacial entre puntos alejados entre sí más de unos pocos milímetros, y muestra además, en el rango de separaciones explorado, que no existe evidencia alguna de que la coherencia espacial vaya a recuperarse al ir aumentando  $d$ .

La evidencia presentada hasta el momento del carácter local de las fluctuaciones es clara, pero indirecta. Para subsanar esta deficiencia se ha realizado un experimento de correlación cruzada consistente en medir en el mismo pulso láser, simultáneamente, la evolución temporal de dos pequeñas áreas del haz separadas por una cierta distancia  $d$ . En nuestro caso las áreas observadas tienen un diámetro de 2 mm, están separadas unos 6 mm y posicionadas simétricamente respecto al centro de la sección recta del haz, a lo largo de una de las bandas horizontales de que está formado.

En la figura 3.11 pueden verse las evoluciones temporales de dichas áreas registradas en un pulso del láser, así como sus espectros de Fourier y sus funciones de autocorrelación normalizadas a la unidad.

Simplemente por inspección visual de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  podemos convencernos de que la correlación entre ambas señales es muy baja. Esto queda de manifiesto más claramente en los espectros de Fourier individuales, pues comprobamos que no solamente las amplitudes de los picos significativos difieren de una señal a otra, sino que tampoco coinciden las posiciones de los mismos. Como ya se señaló anteriormente esto es una clara prueba de que el comportamiento observado *no* se puede interpretar como un simple batido axial-transversal de modos cuyas fases sean constantes en el tiempo. Las funciones de autocorrelación abundan en lo mismo, dado que las

estructuras reconocibles en una de ellas no están en la otra y viceversa. A partir de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  se calcula función de correlación cruzada de ambas señales (figura 3.12).

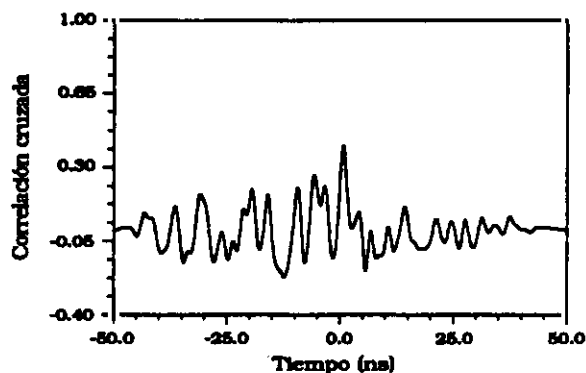


**Figura 3.11.** Evolución temporal, espectro de potencia y autocorrelación de dos señales registradas simultáneamente ((a), (b), (c) y (d), (e), (f) respectivamente), correspondientes a dos puntos distintos del haz del láser.

Dicha correlación cruzada se ha normalizado a la media geométrica de los valores de las autocorrelaciones para  $t = 0$  [Kli89, Pas91]. Como era de esperar, la correlación cruzada es significativamente más baja que cualquiera de las autocorrelaciones, por



todo lo cual se concluye que la correlación espacial es muy baja para puntos del spot separados una distancia mayor o igual a 6 mm.



**Figura 3.12.** Correlación cruzada de las señales de la figura anterior.

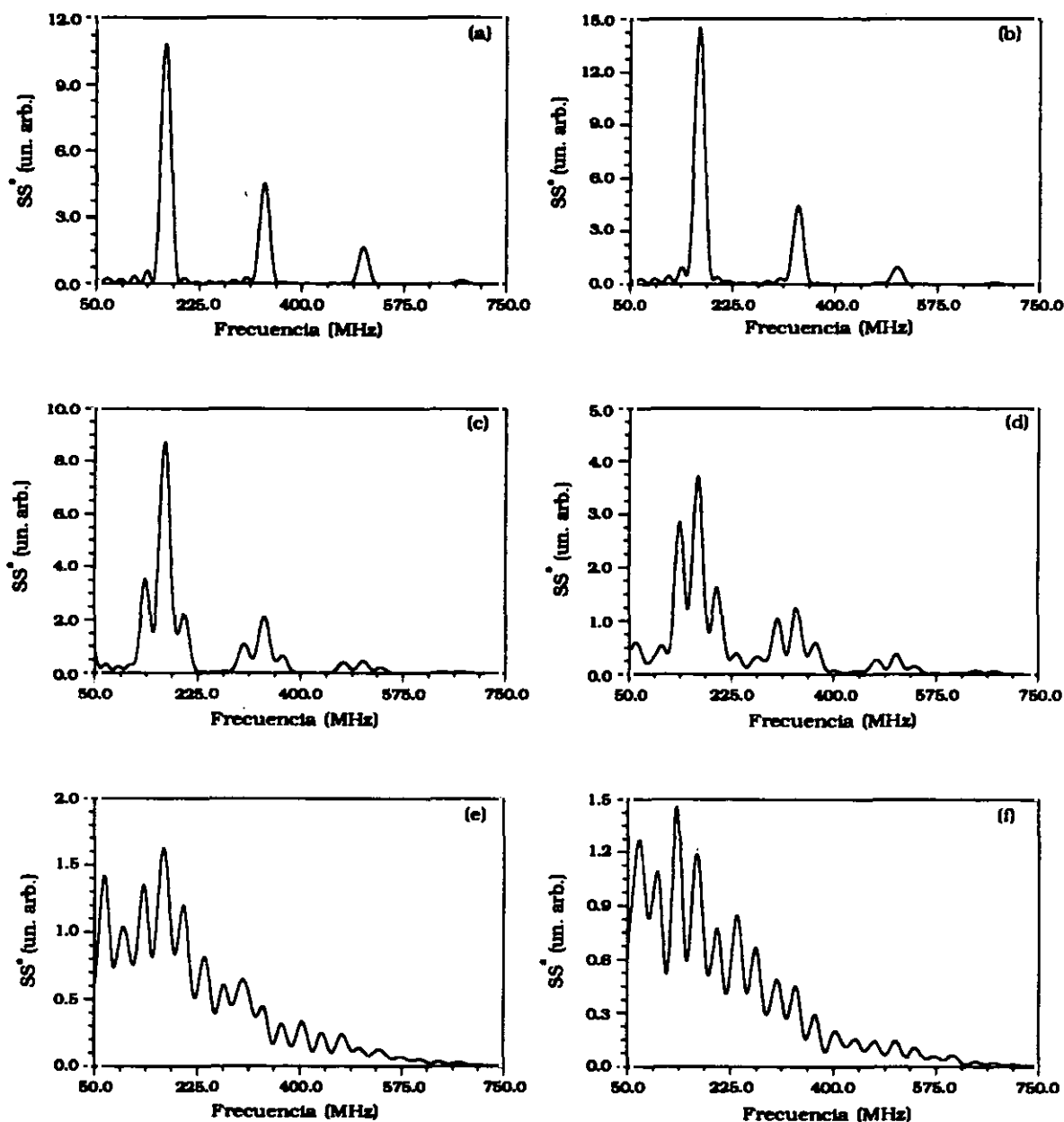
Los resultados anteriores se han obtenido para distintas posiciones de los dos puntos de la sección recta del haz (aunque separados todos ellos por distancias de unos 6 mm), lo que demuestra que el efecto de baja correlación espacial no es debido a una elección particular más o menos afortunada de las zonas de la sección transversal estudiadas, sino que es un comportamiento que se extiende por todo el patrón transversal de intensidad del láser.

Una vez comprobado que las fluctuaciones irregulares que aparecen en el PCG son de carácter local, intentamos encontrar algún parámetro de control del sistema láser que nos permita pasar de un régimen temporal regular al irregular, para de esta forma averiguar todo lo que nos sea posible sobre la causa de las fluctuaciones. Como ya vimos en § 3.2, las características estadísticas de las fluctuaciones irregulares no varían apreciablemente bajo cambios importantes en la longitud del resonador, composición de la mezcla gaseosa o reflectividad del espejo de salida, pero son sensibles a la introducción de diafragmas intracavidad.

Hemos de decir que originalmente la idea de introducir dichos diafragmas fue sugerida por un experimento análogo realizado con el láser de colorantes. En aquellos momentos sabíamos que en ese caso la dinámica se veía profundamente afectada cuando (manteniendo fija la tensión de excitación) se disminuía el diámetro del diafragma por debajo de un valor crítico. Nuestro objetivo inicial era comprobar si en el caso del láser de  $\text{CO}_2$  los diafragmas introducían un cambio de dinámica similar al del láser de colorantes. Observamos efectivamente profundos cambios en la evolución temporal al introducir diafragmas intracavidad de diámetros menores o iguales a 8 mm, pero para nuestra sorpresa no eran como los que esperábamos a tenor de la experiencia previa con el láser de colorantes. Vamos pues a describir cuál es el efecto de

los diafragmas en la dinámica temporal y la significación de tales resultados para la comprensión de los fenómenos que estamos estudiando.

El patrón transversal de intensidad integrado en el tiempo, medido en campo próximo, varía con el diámetro del diafragma intracavidad según se mostró en la figura 3.1. Usando diámetros entre 6 y 8 mm se logra que el láser oscile en el modo transversal fundamental ( $TEM_{00}$ ). A medida que vamos aumentando el diámetro se obtiene una mezcla progresivamente más compleja de estructuras transversales (figura 3.1).



**Figura 3.13.** Espectros de potencia promediados en función del diámetro del diafragma intracavidad. De (a) a (e)  $\phi = 10, 12, 14, 16$  y  $20$  mm, (f) sin diafragma.

En el PCG se ha estudiado cómo varía la dinámica temporal local en campo próximo para  $\phi_{intracavidad} = 6, 8, 10, 12, 14, 16$  y  $20$  mm, almacenando en cada caso 40 realizaciones para proceder seguidamente a su análisis estadístico (fundamentalmente el cálculo del espectro de Fourier promedio). Los espectros de potencia muestran que para diámetros menores o iguales a  $12$  mm estamos en presencia de un batido de modos axiales prácticamente perfecto, con los picos de frecuencia situados en  $\nu_n = n \Delta\nu$ ,  $\Delta\nu = c/2L = 167$  MHz.

Para  $\phi_{intracavidad} = 14$  mm se observa la primera señal de cambio de comportamiento dinámico en el espectro promedio, puesto que los picos de frecuencia se ensanchan y aparecen otros picos satélites (especialmente notable es el cercano a  $\nu_2 = 334$  MHz). Cualitativamente tenemos el mismo comportamiento para  $\phi_{intracavidad} = 16$  mm, pero al pasar a  $20$  mm el espectro promedio aparece mucho más ancho, y los picos característicos y bien definidos que observábamos para diafragmas menores han desaparecido, lo cual es una clara indicación de que el comportamiento temporal se ha hecho mucho más irregular. Para completar esta serie de medidas se ha calculado también el espectro promedio en ausencia de diafragma. Los resultados se resumen en la figura 3.13.

Un examen más atento de los espectros promedio en escala logarítmica permite observar que para  $\phi_{intracavidad} = 8, 10$  mm existe un fuerte acoplo en fase de los modos axiales que se extiende hasta frecuencias del orden de  $2$  GHz. Se pueden contar hasta  $15$  modos axiales acoplados, lo cual está en perfecto acuerdo con el número de modos axiales que caben dentro de la anchura de línea de ganancia del láser de  $\text{CO}_2$ .

Con el diafragma de  $14$  mm se observa en el espectro logarítmico la transición dinámica por el ensanchamiento de los picos, la aparición de picos satélites y además por *una importante disminución del número de modos axiales acoplados en fase*. Cualitativamente se repite el mismo tipo de comportamiento para  $\phi_{intracavidad} = 16$  mm.

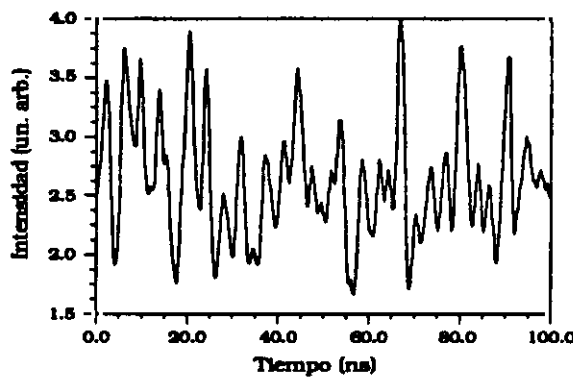
En ausencia de diafragma intracavidad el espectro promedio (en escala logarítmica) no muestra trazas claras de los picos de frecuencia que existen para diámetros menores de  $16$  mm, sino que es bastante ancho, indicando que el acoplo en fase se ha destruido (véase la figura 8 de [Pas91]).

Una vez expuestos los hechos experimentales más relevantes observados en el PCG vamos a pasar a describir el comportamiento en la cola de transferencia colisional.

### 3.5. Dinámica del láser de $\text{CO}_2$ en la cola de transferencia colisional (CTC)

Los métodos experimentales utilizados para la obtención de las señales en la CTC son los mismos que en el caso anterior, con la salvedad de que ahora necesitamos retrasar la señal con respecto a la que activa el disparo de los digitalizadores para de este modo empezar a medir una vez pasado el PCG. En nuestro caso hemos usado un retraso de 150 ns, suficiente para eliminar este transitorio inicial del pulso láser y empezar a medir en la zona cuasiestacionaria del mismo.

En ausencia de elementos selectores intracavidad, y como era de esperar por el comportamiento temporal del PCG, la emisión de intensidad del láser consiste en fluctuaciones irregulares de gran amplitud superpuestas a un nivel de continua (figura 3.14).



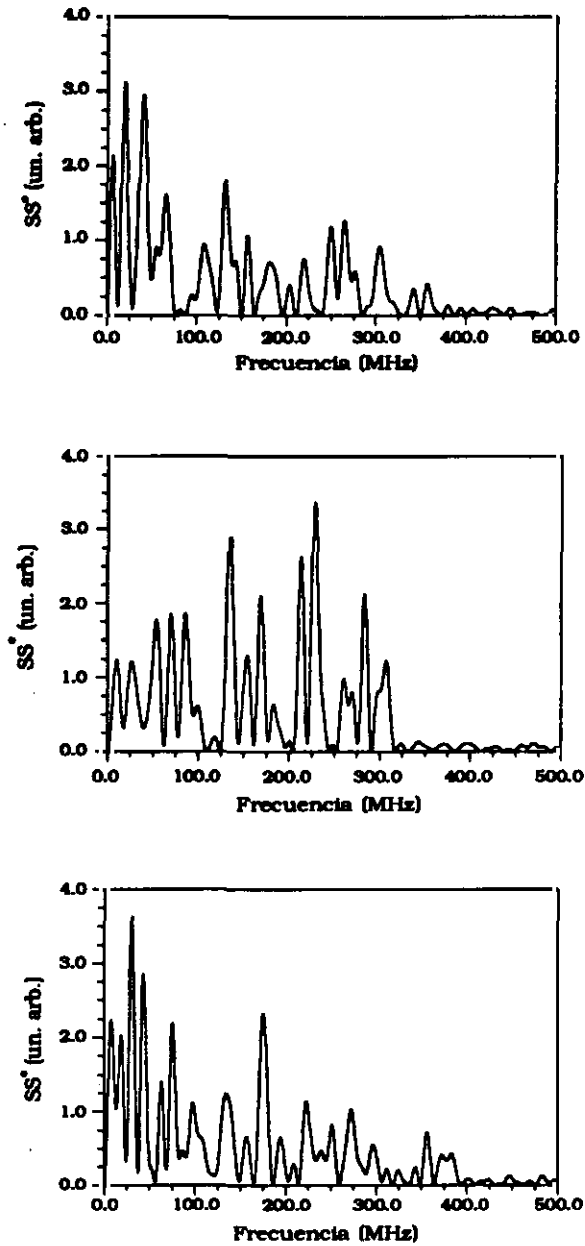
**Figura 3.14.** Aspecto típico de la intensidad del láser de CO<sub>2</sub> en la cola de transferencia colisional.

Debido a que en este caso las señales son estacionarias con gran aproximación, hemos simplificado ligeramente el algoritmo de extracción de las fluctuaciones ( $F(t)$ ) de la señal experimental ( $s(t)$ ), quedando

$$F(t) = \frac{s(t) - \bar{s}}{\bar{s}} \quad (3.10)$$

$$\bar{s} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \quad (3.11)$$

Los espectros de Fourier calculados a partir de pulsos individuales tomados en las mismas condiciones (parámetros de control fijos) difieren en cuanto a la posición y amplitud de sus picos, mostrando el típico aspecto irregular y de banda ancha de las señales caóticas (figura 3.15).



**Figura 3.15.** Espectros de potencia de señales tomadas en la CTC manteniendo los parámetros de control constantes. La anchura y falta de reproducibilidad de los mismos apuntan a una dinámica irregular de origen caótico.

Sin embargo, cuando se detecta la señal integrada correspondiente a toda la sección recta del láser, las fluctuaciones irregulares desaparecen completamente, quedando tan sólo una oscilación regular que coincide en sus componentes de frecuencia con el batido de los modos axiales del resonador (figura 1 de [Pas91]).

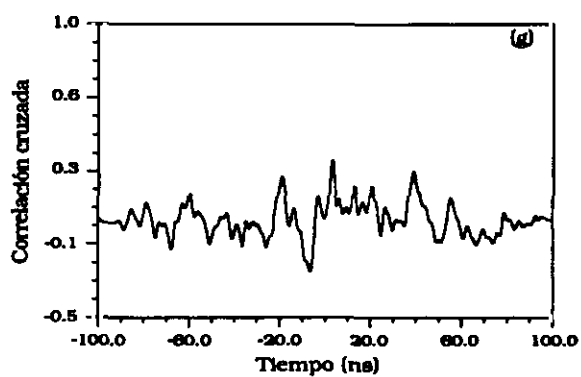
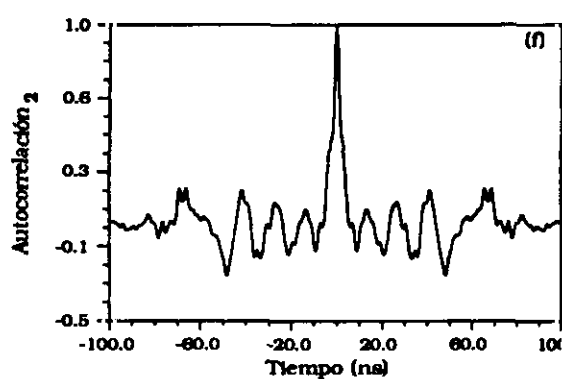
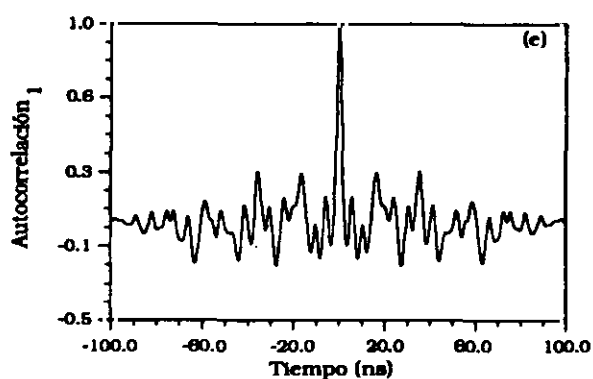
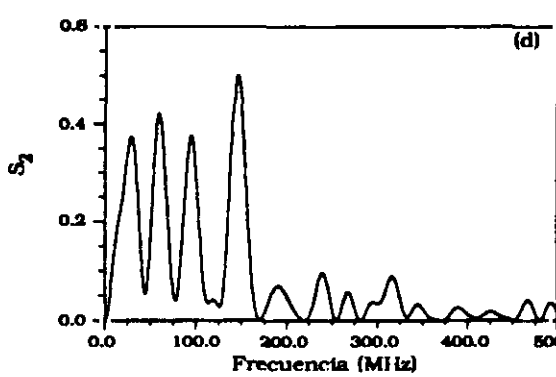
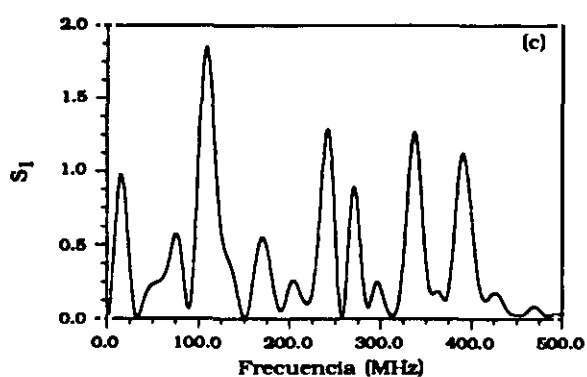
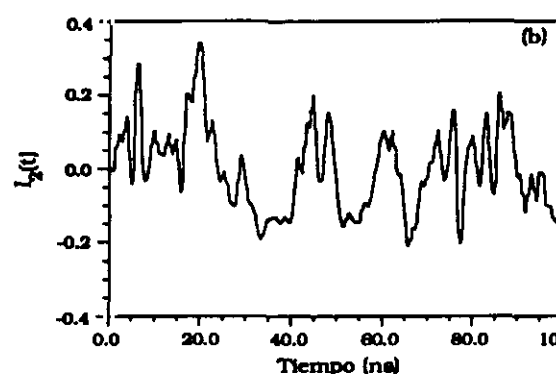
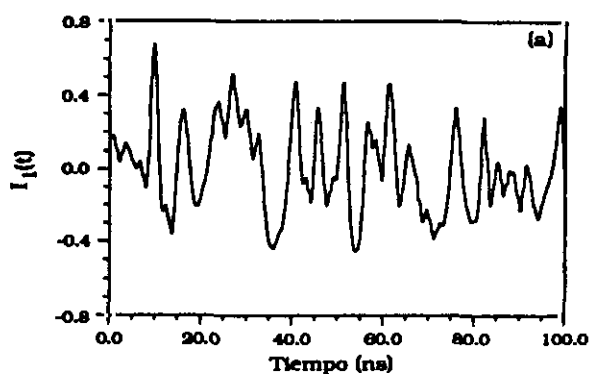
Así pues el efecto de mezclar (integrar) áreas diferentes de la sección recta del haz del láser es el mismo en el PCG y en la CTC, a saber, cuanto mayor es el área focalizada menor es la amplitud de las fluctuaciones irregulares.

También en este caso hemos hecho medidas directas de correlación espacial midiendo el comportamiento temporal en pares de puntos separados 6 mm y distribuidos por distintas zonas del haz del láser. La figura 3.16 nos permite comprobar que la correlación transversal es muy baja, lo que prueba que el comportamiento local se da también en la CTC, descartándose así la posible naturaleza transitoria del fenómeno.

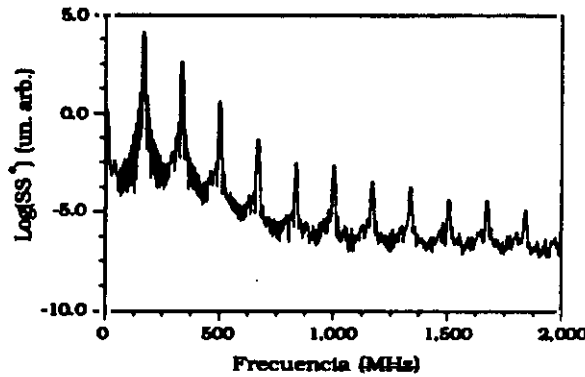
Al ser la CTC una zona de comportamiento cuasiestacionario (debido a la lentitud del decaimiento del pulso láser frente al periodo típico de las fluctuaciones) podemos aplicar a las señales medidas todas aquellas técnicas desarrolladas para el estudio y diagnóstico de sistemas caóticos deterministas. Han sido justamente estas técnicas (aplicadas en la CTC) las que nos han permitido concluir que ***el fenómeno estudiado es un caso de caos espaciotemporal que surge de forma dinámica***. Pero veamos antes en detalle uno de los experimentos cruciales en los que se basa esta conclusión.

Se trata de nuevo de la introducción de diafragmas intracavidad de diámetro variable y su influencia en la dinámica de la CTC. Se han registrado 40 señales individuales en forma local y se ha calculado el espectro de potencia promedio (promedio de los módulos al cuadrado de los espectros de Fourier de cada pulso) para cada valor del parámetro de control. Los resultados se pueden resumir como sigue: cuando  $\phi_{intracavidad} = 8$  mm la dinámica temporal es perfectamente ordenada y corresponde al batido axial de modos. Los picos del espectro promedio están equiespaciados y su separación coincide con la predicha por la fórmula  $\Delta\nu = c/2L$  con  $L = 90$  cm. Tal como ocurría en el PCG se observa un gran número (14-15) de modos axiales acoplados en fase (figura 3.17).

Los pulsos individuales tomados con  $\phi_{intracavidad} = 8$  mm muestran una gran variedad en cuanto a su aspecto temporal (aunque las oscilaciones que los modulan siempre son periódicas), que corresponde, cuando analizamos su espectro de Fourier, a combinaciones con distintas amplitudes y fases de los modos axiales de disparo a disparo. Sin embargo la posición de los picos de frecuencia es siempre la misma (véase la figura 11 de [Pas91]).



**Figura 3.16.** Intensidades en dos puntos del haz del láser separados 6 mm ((a), (b)), espectros de potencia de las mismas ((c), (d)) y funciones de autocorrelación y correlación cruzada ((e), (f), (g)).



**Figura 3.17.** Espectro de potencia promedio de las fluctuaciones de intensidad (en escala logarítmica) para  $\phi = 8$  mm.

Los pulsos individuales tomados con  $\phi_{intracavidad} = 8$  mm muestran una gran variedad en cuanto a su aspecto temporal (aunque las oscilaciones que los modulan siempre son periódicas), que corresponde, cuando analizamos su espectro de Fourier, a combinaciones con distintas amplitudes y fases de los modos axiales de disparo a disparo. Sin embargo la posición de los picos de frecuencia es siempre la misma (véase la figura 11 de [Pas91]).

Con el diafragma de  $\phi_{intracavidad} = 10$  mm observamos la primera bifurcación de la dinámica local. Una estructura bien conspicua aparece a bajas frecuencias, dominada por dos picos situados a 20 y 40 MHz. El cambio en la dinámica se observa también en las altas frecuencias, concretamente en los cuatro picos satélites colocados simétricamente alrededor de  $\nu = 167$  MHz. La separación entre picos contiguos es aproximadamente 20 MHz, valor que coincide bastante bien con la separación entre modos transversales vecinos dada por la expresión

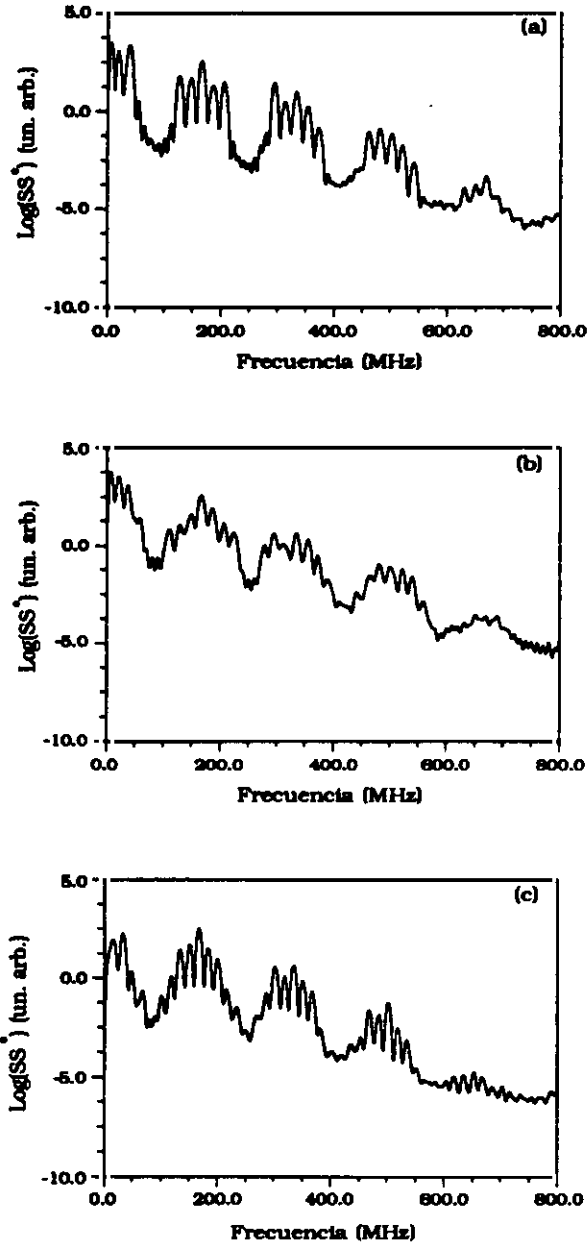
$$\Delta\nu_{\perp} = \frac{c \cdot \arccos \sqrt{(1 - \frac{L}{R_1})(1 - \frac{L}{R_2})}}{2\pi L} \quad (3.12)$$

con  $R_1 = \infty$ ,  $R_2 = 10$  m,  $L = 90$  cm.

El hecho de que para  $\phi_{intracavidad} = 10$  mm se observe un cambio en el patrón transversal de la intensidad del láser junto con la coincidencia de la separación en



frecuencia de los nuevos picos con la asociada a modos transversales indica que esta primera bifurcación se debe a la aparición de nuevos modos transversales.

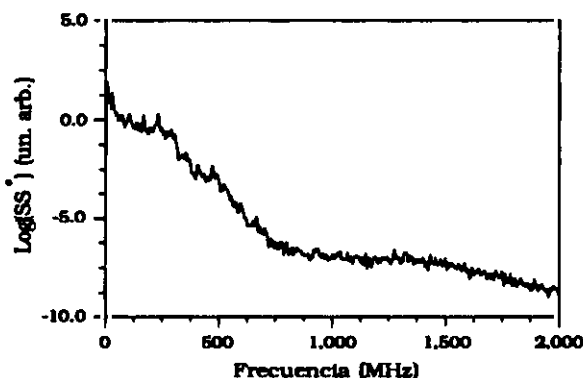


**Figura 3.18.** Espectros de potencia promediados de las fluctuaciones de intensidad (en escala logarítmica) para  $\phi = 10, 12, 14$  mm ((a), (b), (c)).

Nos parece muy notable el hecho de que en el PCG no haya rastro de dichos modos transversales para  $\phi_{intracavidad} = 10$  mm (empieza a haber evidencia de los mismos cuando  $\phi_{intracavidad} = 14$  mm), lo cual indica que estamos observando el surgimiento o nacimiento de los modos transversales en tiempo real, y por tanto estudiando el sistema desde su estado transitorio inicial hasta el estacionario. Los tiempos de formación de los modos transversales están regulados por el balance entre la ganancia

provista por el medio activo y las pérdidas difractivas debidas al diafragma intracavidad, y en general a la estructura del resonador, de manera que en los casos de  $\phi_{intracavidad} = 10, 12$  y  $14$  mm observamos que durante la primera fase del pulso láser (50 ns aproximadamente) sólo se forma una estructura transversal, y únicamente para  $t \sim 200$  ns se observa el desarrollo e interacción de sucesivas y cada vez más complicadas estructuras transversales. Los espectros promediados en la CTC para  $\phi_{intracavidad} = 10, 12$  y  $14$  mm ilustran este punto de manera directa (figura 3.18).

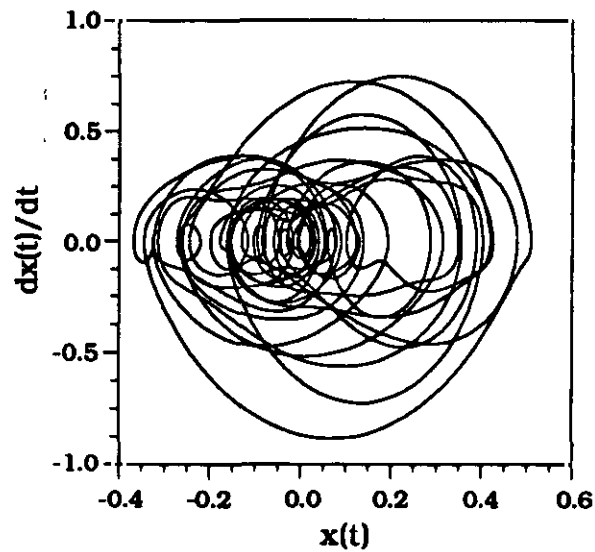
Un examen de los espectros logarítmicos en los casos de  $\phi_{intracavidad} = 8, 10$  mm muestra que en el primero hay alrededor de 14 modos axiales oscilando en acoplo de fase, y no existen trazas de modos transversales superiores al  $TEM_{00}$ . En el segundo vemos que los picos centrados en  $\nu_n = 167n$  MHz ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) se ensanchan y aparecen picos satélites con  $\nu_n$  como frecuencia central, y lo que es más importante, el acoplo de las fases entre modos axiales muy separados en frecuencia se ha destruido. Una posible explicación de este hecho es que la sucesiva aparición de modos transversales al incrementar el diámetro del diafragma intracavidad debilita y termina por destruir el acoplo en fase de los modos axiales, empezando por los más alejados entre sí hasta llegar a los vecinos más próximos [Pas91].



**Figura 3.19.** Espectro promedio de las fluctuaciones irregulares de intensidad en la CTC en ausencia de diafragma intracavidad.

En ausencia de diafragma intracavidad el comportamiento temporal es extremadamente irregular como muestra el espectro promedio ancho de la figura 3.19. Como en este caso la dinámica es muy aproximadamente estacionaria, hemos aplicado a las señales locales tomadas sin diafragma algunos de los algoritmos desarrollados para el estudio de los sistemas caóticos deterministas de baja dimensionalidad. Concretamente hemos intentado reconstruir el atractor subyacente a la dinámica de la energía del láser, representando  $I(t)$  frente a  $dI(t)/dt$ , y hemos aplicado el algoritmo de Grassberger-Procaccia a dichas señales.

El resultado se muestran en la figura 3.20 para un caso típico. La reconstrucción física del atractor subyacente muestra una estructura extremadamente complicada, reminiscente de un atractor extraño caótico, y al mismo tiempo el algoritmo G-P converge hacia un valor  $\approx 2.7$ , evidencias que junto con los espectros de Fourier y las transiciones dinámicas discutidas (bifurcaciones) al aumentar  $\phi_{\text{intracavidad}}$  nos permiten afirmar con un alto grado de confianza que el comportamiento dinámico local observado es explicable (en lo tocante a su aspecto temporal) mediante un modelo de ecuaciones deterministas con un número relativamente pequeño de grados de libertad.



**Figura 3.20.** Reconstrucción del atractor a partir de una señal experimental.

En el capítulo siguiente desarrollaremos un modelo teórico del comportamiento de los láseres basado en las ecuaciones semiclásicas de Maxwell-Bloch que presenta bastantes de las propiedades observadas en la práctica.

## CAPITULO 4

### DINAMICA ESPACIO-TEMPORAL DE LOS LASERES EN LA APROXIMACION SEMICLASICA

#### 4.1. Aproximaciones teóricas a la física del láser

En esta sección se discuten brevemente las principales aproximaciones teóricas que describen el comportamiento de los láseres.

Para hacerse una idea de las dificultades de la modelización correcta de estos sistemas recordemos que en condiciones típicas un láser consiste en multitud de átomos o moléculas activos que interactúan no linealmente con el campo electromagnético en una cavidad resonante. Estos sistemas funcionan en general lejos del equilibrio térmico (representado por el umbral láser), y son abiertos con respecto a los intercambios de energía y, eventualmente, de materia con sus alrededores. Además la descripción completamente adecuada de los procesos físicos de interés debe incluir la naturaleza cuántica de los fenómenos de emisión y absorción estimulada de radiación, así como la emisión espontánea, la estructura discreta de los niveles atómicos de energía y la cuantificación del propio campo electromagnético.

Evidentemente no siempre es necesario en las aplicaciones prácticas un nivel de detalle tal que obligue a utilizar la teoría completa del efecto láser sino que, dependiendo de los casos, son posibles descripciones más simplificadas de los fenómenos esenciales. Por ello vamos a ir presentando las diversas teorías en sus rasgos esenciales, ordenadas de menor a mayor complejidad y señalando en cada caso cuál es su ámbito de aplicación, sus principales logros y también sus limitaciones.

Quizá la descripción más sencilla del láser es aquella en términos de *ecuaciones de balance*, es decir, de ecuaciones que nos dan la variación temporal del número de fotones y de átomos en sus correspondientes niveles energéticos en función de los procesos de generación y eliminación de los mismos. En el caso más sencillo estos modelos consideran átomos en dos estados energéticos (fundamental y excitado) y una población de fotones resonantes con la frecuencia de la transición entre dichos niveles. Es sencillo generalizar las ecuaciones de balance para incluir láseres a tres o cuatro niveles, mucho más próximos a los dispositivos reales. En general las tasas de generación o eliminación de las poblaciones de fotones a unas ciertas frecuencias y las

del número de átomos en sus diferentes estados de energía dependen no linealmente de las poblaciones de fotones y átomos en un instante dado, obteniéndose por tanto un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas que determinan la evolución temporal de dichas magnitudes.

La principal limitación de las ecuaciones de balance es que no tienen en cuenta las relaciones de fase entre los diversos modos de la radiación. Por lo tanto, aquellas situaciones en las que tales acoplos o relaciones de fase sean importantes no podrán ser descritas correctamente por dicha teoría. Sin embargo las ecuaciones de balance son extremadamente útiles cuando lo único que se requiere es información global sobre algunos parámetros del láser, como por ejemplo la potencia umbral para el funcionamiento del mismo, la distribución estacionaria de la intensidad de la radiación y de las poblaciones atómicas, los fenómenos de pulso gigante, de conmutación de ganancia, las oscilaciones de relajación o la variación de la ganancia con la intensidad de salida [Hak85].

En el siguiente nivel de complejidad podemos situar la *teoría semiclásica*. En dicha teoría el campo electromagnético se describe mediante las ecuaciones de Maxwell (por lo tanto clásicamente), mientras que la materia se describe en términos cuánticos, así como la interacción de la radiación con los átomos. Los términos fuente del campo electromagnético, que en la teoría clásica son dipolos oscilantes, se representan aquí mediante promedios mecanocuánticos sobre los momentos dipolares inducidos en los átomos. En la teoría semiclásica se consideran asimismo los procesos de bombeo y decaimiento de las poblaciones atómicas, aunque de manera esencialmente fenomenológica. Usando las aproximaciones citadas más arriba se obtiene un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales para el campo electromagnético, la polarización macroscópica y la inversión de población. Las ecuaciones así obtenidas se pueden reducir en condiciones adecuadas a las de balance, a las que la teoría semiclásica incluye por tanto como caso límite.

Así pues la teoría semiclásica explica todo aquello que ya explicaban las ecuaciones de balance y además otros fenómenos de notable interés, como son las condiciones en que se producirá emisión láser monomodo o multimodo, el desplazamiento de la frecuencia de emisión con respecto a la frecuencia de la transición atómica, el fenómeno de acoplo en fase de los modos del láser (bloqueo de modos), la posibilidad de emisión de pulsos ultracortos, etc. Especialmente interesante para los temas tratados en esta memoria es el que la teoría semiclásica prediga que bajo circunstancias bien definidas el campo eléctrico, la intensidad luminosa y la inversión de población oscilan caóticamente, e incluso que el patrón espaciotemporal de la radiación emitida pueda presentar aspectos que merecen con todo derecho el nombre de turbulentos. Todos estos aspectos son objeto hoy en día, como ya dijimos, de un

intenso estudio teórico y experimental, aunque aún estamos lejos de lograr una comprensión razonablemente completa de los mismos.

La principal limitación de la teoría anteriormente expuesta es el tratamiento clásico del campo electromagnético. De esta forma es imposible unificar en una misma teoría la emisión coherente de los láseres y la emisión incoherente de las fuentes térmicas de radiación, así como presentar una descripción completa del fenómeno láser tanto para valores de la excitación por encima del primer umbral como por debajo de él.

La teoría cuántica del láser es la encargada de rellenar esa laguna, y es la más complicada y general de las que describen el comportamiento de estos dispositivos. La motivación para su desarrollo vino dada en parte por la imagen insatisfactoria que del umbral láser hacía la teoría semiclásica. Según ésta, para valores por debajo del primer umbral no se debería observar emisión en absoluto, mientras que para valores por encima del mismo se tendría una emisión perfectamente coherente. Esta predicción no se verifica en la realidad [Hak85].

Un tratamiento totalmente cuántico tanto del campo electromagnético como de la materia ha permitido obtener una imagen unificada de lo que ocurre a ambos lados del umbral láser, así como un marco general donde tienen cabida tanto las fuentes incoherentes de radiación como las coherentes. Uno de los éxitos principales de la teoría completa ha sido la explicación de las propiedades estadísticas de la radiación en la inmediata vecindad del umbral láser, y su conexión con los fenómenos de transiciones de fase.

Ocurre a menudo que en las condiciones de trabajo de los láseres reales la teoría cuántica completa se reduce a la teoría semiclásica, más manejable, y que será la que usemos en lo que resta de este capítulo para intentar explicar, tan solo parcialmente, las inestabilidades espaciotemporales observadas en los experimentos.

## **4.2. Deducción de las ecuaciones de Maxwell-Bloch**

En esta sección vamos a deducir las ecuaciones de Maxwell-Bloch (MB), que son las que en aproximación semiclásica rigen el comportamiento (fuertemente acoplado) del campo eléctrico, la polarización macroscópica y la inversión de población en el láser. Nuestro punto de partida serán las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, que no cuantificaremos, y la ecuación de Schrödinger para la materia (dipolos atómicos o moleculares), haciendo énfasis en cuáles son las principales aproximaciones que son necesarias para llegar a la forma final de las ecuaciones MB. De esta forma será más sencillo intentar generalizaciones de las mismas, por el simple expediente de no emplear algunas de las aproximaciones usadas en su deducción.

Supongamos que tenemos un medio material con dos niveles energéticos y un campo electromagnético de frecuencia próxima a la frecuencia de transición entre ambos dada por  $\omega_{12} = 2\pi(E_1 - E_2)/h$ . Clásicamente el campo electromagnético verifica las ecuaciones de Maxwell en un medio material

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= -\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{4.1}$$

junto con las relaciones constitutivas que ligan  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  con  $\vec{D}$  y  $\vec{H}$

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0}\end{aligned}\tag{4.2}$$

, y la relación entre campo eléctrico y densidad de corriente dada a través de la ley de Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}\tag{4.3}$$

Tomando el rotacional de la primera ecuación de (4.1) y usando (4.2) tenemos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H})\tag{4.4}$$

Desarrollando el miembro de la izquierda de (4.4) mediante la identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}\tag{4.5}$$

y con la cuarta ecuación de (4.1) obtenemos

$$\Delta \vec{E} = \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}.\tag{4.6}$$

En la deducción de (4.6) hemos usado algunas simplificaciones que, aunque plenamente justificadas en el caso de los láseres, conviene hacer explícitas:

\* Suponemos que la frecuencia de la radiación es suficientemente alta ( $\omega \gg 10^9$  Hz) para que no la sigan los dipolos magnéticos, con lo cual tenemos la sencilla relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  dada por la segunda ecuación de (4.2).

\* Suponemos que el medio activo es homogéneo e isotrópico, de forma que el tensor de conductividad se reduce a un escalar (ecuación 4.3) .

\* Suponemos que no existen cargas eléctricas reales libres en el medio.

Si en (4.6) ponemos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$  en la forma

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}^{(+)} + \tilde{\mathbf{E}}^{(-)} = \tilde{\mathbf{E}}_0^{(+)}(\tilde{\mathbf{r}}, t) e^{-i(\omega t - kz)} + \text{c.c} \quad (4.7)$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^{(+)} + \tilde{\mathbf{P}}^{(-)} = \tilde{\mathbf{P}}_0^{(+)}(\tilde{\mathbf{r}}, t) e^{-i(\omega t - kz)} + \text{c.c} \quad (4.8)$$

tendremos que  $\mathbf{E}^{(\pm)}$  verifican ecuaciones con la misma forma que (4.6), siendo los segundos miembros  $\mathbf{P}^{(\pm)}$  respectivamente. La coordenada  $z$  representa la dirección en la cual se propaga principalmente la radiación.

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}^{(\pm)} - \sigma \mu_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}^{(\pm)}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}^{(\pm)}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}^{(\pm)}}{\partial t^2} \quad (4.9)$$

Suponiendo para  $\mathbf{E}^{(\pm)}$  las dependencias funcionales señaladas en (4.7) y (4.8) podemos explicitar, usando (4.9), cuáles serán las ecuaciones que verifican  $\mathbf{E}_0^{(\pm)}$ , que representan las variaciones lentas del campo eléctrico con respecto a la frecuencia óptica ( $\omega$ ).

Esta descomposición en partes rápida y lentamente variables se justifica en la mayor parte de los experimentos con láseres (y en particular en los nuestros), debido a que las frecuencias ópticas de la radiación ( $\approx 500$  THz en el caso del láser de colorantes y  $\approx 28$  THz en el de  $\text{CO}_2$ ) suelen ser muchísimo mayores que las frecuencias de las oscilaciones temporales estudiadas (en nuestro caso son del orden de 10-300 MHz).

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{\mathbf{E}}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)}) - \sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathbf{E}}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)}) - \\ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{\mathbf{E}}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)}) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{\mathbf{P}}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)}) \end{aligned} \quad (4.10)$$



$$\begin{aligned}
\Delta(\vec{E}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)}) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\vec{E}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)}) = \\
&= \left\{ \frac{\partial^2 \vec{E}_0^{(+)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_0^{(+)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_0^{(+)}}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \vec{E}_0^{(+)}}{\partial z} - k^2 \vec{E}_0^{(+)} \right\} e^{-i(\omega t - kz)} = \\
&= \left\{ \Delta \vec{E}_0^{(+)} + 2ik \frac{\partial \vec{E}_0^{(+)}}{\partial z} - k^2 \vec{E}_0^{(+)} \right\} e^{-i(\omega t - kz)}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)}) = \left( \frac{\partial \vec{E}_0^{(+)}}{\partial t} - i\omega \vec{E}_0^{(+)} \right) e^{-i(\omega t - kz)} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)}) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \vec{E}_0^{(+)}}{\partial t} - i\omega \vec{E}_0^{(+)} \right) e^{-i(\omega t - kz)} \right] = \\
&= \left( \frac{\partial^2 \vec{E}_0^{(+)}}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial \vec{E}_0^{(+)}}{\partial t} - \omega^2 \vec{E}_0^{(+)} \right) e^{-i(\omega t - kz)}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Evidentemente, el término  $\partial^2 \mathbf{P}_0^{(+)} / \partial t^2$  tiene una expresión idéntica a (4.13) cambiando  $\mathbf{E}_0^{(+)}$  por  $\mathbf{P}_0^{(+)}$ .

Sustituyendo (4.10) - (4.13) en (4.9) obtenemos la ecuación de evolución para la parte lentamente variable del campo eléctrico

$$\begin{aligned}
&(\Delta \vec{E}_0^{(\pm)} \pm 2ik \frac{\partial \vec{E}_0^{(\pm)}}{\partial z} - k^2 \vec{E}_0^{(\pm)}) - \sigma \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{E}_0^{(\pm)}}{\partial t} \mp i\omega \vec{E}_0^{(\pm)} \right) - \\
&- \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \vec{E}_0^{(\pm)}}{\partial t^2} \mp 2i\omega \frac{\partial \vec{E}_0^{(\pm)}}{\partial t} - \omega^2 \vec{E}_0^{(\pm)} \right) = \\
&= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \vec{P}_0^{(\pm)}}{\partial t^2} \mp 2i\omega \frac{\partial \vec{P}_0^{(\pm)}}{\partial t} - \omega^2 \vec{P}_0^{(\pm)} \right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

La expresión (4.14) es aun exacta (no hemos aplicado ninguna aproximación), si consideramos que el campo eléctrico y la polarización se escriben en la forma (4.7) y (4.8). Vamos a proceder a continuación a simplificar considerablemente (4.14) usando la que se conoce como *aproximación de la amplitud lentamente variable*. Dicha aproximación consiste en suponer que las variaciones temporales y espaciales de las funciones  $\mathbf{E}_0^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{P}_0^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)$  son mucho más lentas que las incluidas en el término  $\exp(\pm i(\omega t - kz))$ . De una manera más formal tenemos que

$$\left\| \frac{\partial \vec{E}_0^{(\pm)}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \omega \vec{E}_0^{(\pm)} \right\| \tag{4.15}$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{P}_0^{(\pm)}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \omega \bar{P}_0^{(\pm)} \right\| \quad (4.16)$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{E}_0^{(\pm)}}{\partial z} \right\| \ll \left\| k \bar{E}_0^{(\pm)} \right\| \quad (4.17)$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \bar{E}_0^{(\pm)}}{\partial t^2} \right\| \ll \left\| \omega \frac{\partial \bar{E}_0^{(\pm)}}{\partial t} \right\| \quad (4.18)$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \bar{P}_0^{(\pm)}}{\partial t^2} \right\| \ll \left\| \omega \frac{\partial \bar{P}_0^{(\pm)}}{\partial t} \right\| \quad (4.19)$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \bar{E}_0^{(\pm)}}{\partial z^2} \right\| \ll \left\| k \frac{\partial \bar{E}_0^{(\pm)}}{\partial z} \right\| \quad (4.20)$$

Aparte de ésto, el operador laplaciano lo escribiremos  $\Delta = \Delta_t + \partial^2/\partial z^2$  donde evidentemente,  $\Delta_t = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ . Con las simplificaciones aportadas por (4.15)-(4.20), (4.14) se reduce a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \bar{E}_0^{(+)} + 2ik \frac{\partial \bar{E}_0^{(+)}}{\partial z} - k^2 \bar{E}_0^{(+)} + i\sigma\mu_0\omega \bar{E}_0^{(+)} + \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \bar{E}_0^{(+)}}{\partial t} + \\ + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{E}_0^{(+)} = -\mu_0\omega^2 \bar{P}_0^{(+)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

(y su compleja conjugada para  $\bar{E}_0^{(-)}$ ).

Haciendo uso de las relaciones  $k^2 = \omega^2/c^2$  y  $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$  en (4.21) tenemos

$$-\frac{ic}{2k} \Delta_{\perp} \bar{E}_0^{(+)} + c \frac{\partial \bar{E}_0^{(+)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{E}_0^{(+)}}{\partial t} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \bar{E}_0^{(+)} + \frac{i\omega}{2\epsilon_0} \bar{P}_0^{(+)} \quad (4.22)$$

Consideramos a continuación las ecuaciones cuánticas para la materia. Para ello pondremos que el hamiltoniano completo del sistema acoplado radiación-materia se escribe como  $H = H_0 + H^s$ , con  $H_0$  el hamiltoniano atómico o molecular y  $H^s$  el de interacción con el campo electromagnético en aproximación dipolar.

$$H^s = -\vec{D} \cdot \vec{E} = e\vec{\xi} \cdot \vec{E} \quad (4.23)$$

Supondremos que  $H_0$  lleva asociado una base ortonormal de estados  $|\phi_i\rangle$  tal que

$$H^0|\phi_i\rangle = W_i|\phi_i\rangle, i = 1, 2, \dots, \infty \quad (4.24)$$

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (4.25)$$

y además,

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i |\phi_i\rangle \quad (4.26)$$

para todo elemento del espacio de Hilbert del sistema atómico. En particular, si consideramos el modelo más simple que incluye sólo dos estados, entonces

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t) e^{-i \frac{W_1 t}{\hbar}} |\phi_1\rangle + c_2(t) e^{-i \frac{W_2 t}{\hbar}} |\phi_2\rangle \quad (4.27)$$

y  $|\psi\rangle$  verificará la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle = (H^0 + H^s) |\psi\rangle \quad (4.28)$$

Desarrollando (4.28) obtenemos

$$\begin{aligned} i\hbar \left[ \left( \dot{c}_1 - i \frac{W_1}{\hbar} c_1 \right) e^{-i \frac{W_1 t}{\hbar}} |\phi_1\rangle + \left( \dot{c}_2 - i \frac{W_2}{\hbar} c_2 \right) e^{-i \frac{W_2 t}{\hbar}} |\phi_2\rangle \right] = \\ = c_1 e^{-i \frac{W_1 t}{\hbar}} W_1 |\phi_1\rangle + c_2 e^{-i \frac{W_2 t}{\hbar}} W_2 |\phi_2\rangle + H^s |\psi\rangle \end{aligned} \quad (4.29)$$

Contrayendo (4.29) con los elementos del espacio dual  $\langle \phi_1 |$  y  $\langle \phi_2 |$  respectivamente obtenemos las ecuaciones de evolución para  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$ .

$$i\hbar \left( \dot{c}_1 - i \frac{W_1}{\hbar} c_1 \right) = W_1 c_1 + \langle \phi_1 | H^s | \psi \rangle e^{i \frac{W_1 t}{\hbar}} \quad (4.30)$$

$$i\hbar \left( \dot{c}_2 - i \frac{W_2}{\hbar} c_2 \right) = W_2 c_2 + \langle \phi_2 | H^s | \psi \rangle e^{i \frac{W_2 t}{\hbar}} \quad (4.31)$$

Para completar el cálculo tenemos que evaluar los elementos de matriz  $\langle \phi_1 | H^s | \psi \rangle$  y  $\langle \phi_2 | H^s | \psi \rangle$ .

$$\begin{aligned}
e^{\frac{iW_1t}{\hbar}} \langle \varphi_1 | H^S | \psi \rangle &= e^{\frac{iW_1t}{\hbar}} \int_{R^3} \varphi_1^*(\vec{x}) (e\vec{\xi} \cdot \vec{E}) (c_1 e^{-\frac{iW_1t}{\hbar}} \varphi_1(\vec{x}) + c_2 e^{-\frac{iW_2t}{\hbar}} \varphi_2(\vec{x})) d\vec{x} = \\
&= c_2 e^{-\frac{i(W_1-W_2)t}{\hbar}} \vec{E} \cdot \vec{D}_{12}
\end{aligned}
\tag{4.32}$$

$$\frac{dc_1}{dt} = c_2 \frac{e^{-\frac{i\omega t}{\hbar}}}{i\hbar} \vec{E} \cdot \vec{D}_{12}
\tag{4.33}$$

$$\frac{dc_2}{dt} = c_1 \frac{e^{\frac{i\omega t}{\hbar}}}{i\hbar} \vec{E} \cdot \vec{D}_{21}
\tag{4.34}$$

Vamos a calcular a continuación la polarización correspondiente al estado atómico descrito por el vector  $|\Psi\rangle$ .

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \langle \psi | \vec{D} | \psi \rangle = \int_{R^3} \psi^*(\vec{x}, t) (-e\vec{x}) \psi(\vec{x}, t) d\vec{x} = \\
&= c_1^* c_2 e^{-i\omega t} \int_{R^3} \varphi_1^*(-e\vec{x}) \varphi_2 d\vec{x} + c_2^* c_1 e^{i\omega t} \int_{R^3} \varphi_2^*(-e\vec{x}) \varphi_1 d\vec{x} = \\
&= -c_1^* c_2 \vec{D}_{12} e^{-i\omega t} - c_2^* c_1 \vec{D}_{21} e^{i\omega t} = -(\alpha \vec{D}_{12} + \alpha^* \vec{D}_{21})
\end{aligned}
\tag{4.35}$$

donde  $\alpha = c_1^* c_2 e^{-i\omega t}$ ,  $\vec{D}_{12}^* = \vec{D}_{21}$ .

Podemos comprobar a partir de (4.35) que para conocer  $\vec{p}$  tenemos que saber cómo varían  $\alpha$  ( $\alpha^*$ ), es decir la cantidad  $c_1 c_2 e^{-i\omega t}$ . Vamos a hallar a continuación la ecuación de evolución para  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d}{dt} (c_1^* c_2 e^{-i\omega t}) = \frac{d}{dt} (c_1^* c_2) e^{-i\omega t} - i\omega c_1^* c_2 e^{-i\omega t} = \\
&= |c_2|^2 \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}_{12}^*}{-i\hbar} + |c_1|^2 \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}_{12}}{i\hbar} - i\omega c_1^* c_2 e^{-i\omega t} = \\
&= -i\omega \alpha - \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}_{21}}{i\hbar} (|c_2|^2 - |c_1|^2) = -i\omega \alpha - \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}_{21}}{i\hbar} D
\end{aligned}
\tag{4.36}$$

Por último, y para cerrar el sistema de ecuaciones que nos darán el comportamiento acoplado de la radiación y la materia vamos a ver la ecuación que verifica  $D = |c_2|^2 - |c_1|^2$ .

$$\begin{aligned}
\frac{dD}{dt} &= \frac{d}{dt}(c_2 c_2^* - c_1 c_1^*) = \frac{d}{dt}(c_2 c_2^*) - \frac{d}{dt}(c_1 c_1^*) = \\
&= \frac{dc_2}{dt} c_2^* + c_2 \frac{dc_2^*}{dt} - \frac{dc_1}{dt} c_1^* - c_1 \frac{dc_1^*}{dt} = \\
&= \vec{E} \cdot \vec{D}_{21} (2c_1 c_2^* \frac{e^{-i\omega t}}{i\hbar}) - \vec{E} \cdot \vec{D}_{12} (2c_1^* c_2 \frac{e^{i\omega t}}{-i\hbar}) = \frac{2\vec{E}}{i\hbar} (\alpha^* \vec{D}_{21} - \alpha \vec{D}_{12}) .
\end{aligned} \tag{4.37}$$

En las ecuaciones (4.36) y (4.37) introducimos términos fenomenológicos de disipación en la forma  $-\gamma\alpha$  y  $(D_0 - D)/T$  siendo  $\gamma^{-1}$  el tiempo de amortiguamiento del momento dipolar individual o tiempo de relajación transversa,  $D_0$  la inversión de población estacionaria y  $T$  el tiempo de relajación de la inversión, o tiempo de relajación longitudinal. Con la adición de estos términos las ecuaciones para  $\alpha$  y  $D$  quedan finalmente de la forma

$$\frac{d\alpha}{dt} = -(i\omega + \gamma)\alpha - \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}_{21}}{i\hbar} D \tag{4.38}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2\vec{E}}{i\hbar} (\vec{D}_{21}\alpha^* - \vec{D}_{12}\alpha) + \frac{D_0 - D}{T} . \tag{4.39}$$

Los términos fenomenológicos introducidos se pueden interpretar fácilmente si suponemos que no existe ningún campo electromagnético presente ( $\mathbf{E} = 0$ ) y usamos (4.38) y (4.39) para calcular  $\alpha(t)$  y  $D(t)$ . En este caso vemos que ambas magnitudes decrecen exponencialmente con el tiempo de manera irreversible, lo cual refleja el hecho experimental bien conocido de la relajación hacia el estado de menor energía de un colectivo atómico excitado y no sometido a influencias o campos externos.

Las ecuaciones que hemos deducido para el comportamiento de la materia se refieren hasta el momento a un único átomo o molécula, pero en general tendremos que tratar con un colectivo de los mismos, por lo que necesitamos en realidad las ecuaciones macroscópicas de evolución de la inversión de población y la polarización en regiones macroscópicamente infinitesimales (de modo que podamos considerar esas cantidades como funciones suficientemente regulares del espacio y el tiempo), pero grandes en comparación con los tamaños atómicos. Vamos pues con la deducción de las mismas.

Suponiendo que por  $\mathbf{r}_\mu$  denotamos las posiciones de los centros activos del medio material, para cada valor del índice  $\mu$  tendremos para las variables  $\alpha$  y  $D$  las ecuaciones

$$\frac{d\alpha_\mu}{dt} = -(i\omega_\mu + \gamma)\alpha_\mu - \frac{\vec{E}(\vec{r}_\mu) \vec{D}_{12}}{i\hbar} D_\mu \tag{4.40}$$

$$\frac{dD_\mu}{dt} = \frac{2\vec{E}(\vec{r}_\mu)}{i\hbar} (\vec{D}_{21}\alpha_\mu^* - \vec{D}_{12}\alpha_\mu) + \frac{D_0 - D}{T} \tag{4.41}$$

siendo el momento dipolar atómico

$$\bar{p}_\mu = -(\bar{D}_{12}\alpha_\mu + \bar{D}_{21}\alpha_\mu^*) \quad (4.42)$$

podemos definir la polarización macroscópica como

$$\bar{P}(\bar{r}, t) = \sum_\mu \bar{p}_\mu \delta(\bar{r} - \bar{r}_\mu) = -\sum_\mu (\bar{D}_{12}\alpha_\mu + \bar{D}_{21}\alpha_\mu^*) \delta(\bar{r} - \bar{r}_\mu) \quad (4.43)$$

Asimismo la inversión de población macroscópica será

$$D(\bar{r}, t) = \sum_\mu D_\mu \delta(\bar{r} - \bar{r}_\mu) \quad (4.44)$$

A partir de (4.40) y (4.41) se pueden obtener fácilmente las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}^{(+)}}{dt} &= -\sum_\mu \frac{d\alpha_\mu}{dt} \bar{D}_{12} \delta(\bar{r} - \bar{r}_\mu) = \\ &= -\sum_\mu \left[ -(i\omega_\mu + \gamma)\alpha_\mu - \frac{\bar{E}(\bar{r}_\mu) \cdot \bar{D}_{21}}{i\hbar} D_\mu \right] \bar{D}_{12} \delta(\bar{r} - \bar{r}_\mu) = \\ &= -(i\omega + \gamma)\bar{P}^{(+)} + \frac{\bar{E}}{i\hbar} \|\bar{D}_{12}\|^2 D(\bar{r}, t) \quad (4.45) \\ \frac{dD}{dt} &= \sum_\mu \frac{dD_\mu}{dt} \delta(\bar{r} - \bar{r}_\mu) = \sum_\mu \left[ \frac{2\bar{E}(\bar{r}_\mu)}{i\hbar} (\bar{D}_{21}\alpha_\mu^* - \bar{D}_{12}\alpha_\mu) + \frac{D_0 - D_\mu}{T} \right] \delta(\bar{r} - \bar{r}_\mu) = \\ &= \frac{2\bar{E}}{i\hbar} \sum_\mu (\bar{D}_{21}\alpha_\mu^* - \bar{D}_{12}\alpha_\mu) \delta(\bar{r} - \bar{r}_\mu) + \frac{D_0 - D}{T} = \\ &= -\frac{2\bar{E}}{i\hbar} (\bar{P}^{(-)} - \bar{P}^{(+)}) + \frac{D_0 - D}{T} \quad (4.46) \end{aligned}$$

siendo  $D = ND$  y  $N$  la densidad de centros activos por unidad de volumen.

En las ecuaciones que rigen la evolución de las variables macroscópicas (4.45) y (4.46) vamos a aplicar la aproximación de la amplitud lentamente variable, con lo que tendremos (ver ecs. 4.7 y 4.8)

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \bar{E}^{(+)} + \bar{E}^{(-)} = \bar{E}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)} + c.c \\ \bar{P} &= \bar{P}^{(+)} + \bar{P}^{(-)} = \bar{P}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)} + c.c\end{aligned}\quad (4.47)$$

Así pues

$$\frac{d\bar{P}_0^{(+)}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{P}_0^{(+)} e^{-i(\omega t - kz)}) = \left( \frac{d\bar{P}_0^{(+)}}{dt} - i\omega \bar{P}_0^{(+)} \right) e^{-i(\omega t - kz)} \quad (4.48)$$

y sustituyendo en (4.45) obtenemos

$$\frac{d\bar{P}_0^{(+)}}{dt} - i\omega \bar{P}_0^{(+)} = -(i\omega + \gamma) \bar{P}_0^{(+)} + \frac{\bar{D}_{21} \cdot \bar{D}_{12}}{i\hbar} D (\bar{E}_0^{(+)} + \bar{E}_0^{(-)} e^{2i(\omega t - kz)}) \quad (4.49)$$

Usando en (4.49) una nueva aproximación, conocida como *aproximación de la onda rotatoria*, consistente en promediar en un periodo de la oscilación lenta el término que oscila como  $e^{2i(\omega t - kz)}$ , deducimos la ecuación definitiva para  $\bar{P}_0^{(+)}$

$$\frac{d\bar{P}_0^{(+)}}{dt} = -[i(\omega - \omega) + \gamma] \bar{P}_0^{(+)} + \frac{|\bar{D}_{21}|^2 \bar{E}_0^{(+)}}{i\hbar} D. \quad (4.50)$$

Con las mismas aproximaciones se obtiene a partir de (4.46) la siguiente ecuación para D (inversión de población)

$$\frac{dD}{dt} = \frac{D_0 - D}{T} - \frac{2}{i\hbar} (\bar{E}_0^{(+)} (\bar{P}_0^{(+)})^* - (\bar{E}_0^{(+)})^* \bar{P}_0^{(+)}) \quad (4.51)$$

Las ecuaciones (4.22), (4.50) y (4.51) son un conjunto de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales que rigen, en aproximación semiclásica, la evolución del campo eléctrico macroscópico lentamente variable, la polarización del medio activo y la inversión de población, y se conocen como las ecuaciones de Maxwell-Bloch. Para ponerlas en la forma en que son citadas en la literatura hemos de efectuar aun algunas identificaciones de constantes y cambios de variable dependiente e independiente; concretamente si  $\delta\Omega$  es la diferencia entre la frecuencia del campo y la de las soluciones de una cavidad vacía

$$\gamma = \gamma_{\perp} \quad (4.52.a)$$

$$\frac{1}{T} = \gamma_{//} \quad (4.52.b)$$

$$\kappa = \frac{\hbar \sqrt{\gamma_{\perp} \gamma_{//}}}{2 \|\vec{D}_{12}\|} \quad (4.52.c)$$

$$\chi = i \frac{\|\vec{D}_{12}\|}{2} \sqrt{\frac{\gamma_{//}}{\gamma_{\perp}}} \quad (4.52.d)$$

$$\vec{E}_0^{(+)} = \kappa \vec{F} e^{-i\delta\Omega t} \quad (4.53.a)$$

$$\vec{P}_0^{(+)} = \chi \vec{P} e^{-i\delta\Omega t} \quad (4.53.b)$$

todo lo cual sustituido en (4.22), (4.50) y (4.51) resulta

$$\frac{-i\lambda}{4\pi} \Delta_{\perp} \vec{F} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0 c} - \frac{i\delta\Omega}{c} \right) \vec{F} = \frac{i\omega\chi}{2\epsilon_0 c \kappa} \vec{P} \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\gamma_{\perp} (1 + i \frac{(\varpi - \omega - \delta\Omega)}{\gamma_{\perp}}) \vec{P} + \frac{\|\vec{D}_{12}\|^2}{i\hbar} \frac{\kappa}{\chi} D \vec{F} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\gamma_{//} (D - D_0 - \frac{1}{2} (\vec{F} \cdot \vec{P}^* + \vec{F}^* \cdot \vec{P})) \quad (4.56)$$

Introduciendo variables independientes adimensionales según

$$\tau = \gamma_{\perp} t \quad (4.57.a)$$

$$\eta = \frac{z}{\Lambda} \quad (4.57.b)$$

$$\vec{\rho} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda\Lambda}} \vec{r} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda\Lambda}} (x, y) \quad (4.57.c)$$

y, finalmente, las identificaciones de constantes

$$\delta\Omega' = \frac{\delta\Omega}{\gamma_{\perp}} \quad (4.58.a)$$

$$v = \frac{c}{\Lambda\gamma_{\perp}} \quad (4.58.b)$$

$$\Delta' = \frac{\varpi - \omega - \delta\Omega}{\gamma_{\perp}} \quad (4.58.c)$$

obtenemos unas ecuaciones adimensionales convenientemente escaladas



$$-\frac{i}{4}\Delta_{\perp}^{(\rho)}\bar{\vec{F}} + \frac{\partial\bar{\vec{F}}}{\partial\eta} + \frac{1}{v}\frac{\partial\bar{\vec{F}}}{\partial\tau} - (i\frac{\delta\Omega'}{v} - \frac{\sigma\Lambda}{2\varepsilon_0 c})\bar{\vec{F}} = \alpha\Lambda\bar{\vec{P}} \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial\bar{\vec{P}}}{\partial\tau} = -(1+i\Delta')\bar{\vec{P}} - D\bar{\vec{F}} \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial D}{\partial\tau} = -\frac{\gamma_{//}}{\gamma_{\perp}}(D - D_0 - \frac{1}{2}(\bar{\vec{F}} \cdot \bar{\vec{P}}^* + \bar{\vec{F}}^* \cdot \bar{\vec{P}})). \quad (4.61)$$

Las ecuaciones estudiadas en esta memoria son una generalización de las números (4.59)-(4.61), en las que se ha tenido en cuenta la constante dieléctrica compleja producida por los osciladores no resonantes y los mecanismos dispersivos del medio activo. Así pues en la ecuación (4.6) hemos introducido en lugar del término  $c^{-2} \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$  otro igual a  $\varepsilon c^{-2} \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ . La constante dieléctrica compleja está relacionada con el índice de refracción ( $n$ ) y con el coeficiente de absorción ( $k$ ) por la relación bien conocida

$$\varepsilon = (n - i\kappa)^2. \quad (4.62)$$

Incidentalmente, tanto  $\varepsilon''$  como  $\sigma$  pueden modelar pérdidas concentradas o distribuidas como las producidas por fenómenos de dispersión, difracción o por los espejos de la cavidad resonante.

Como tendremos ocasión de explicar en detalle más adelante, la introducción de estos nuevos términos ha permitido que las soluciones en forma de ondas planas no lineales consideradas en la sección 4.3 den lugar a comportamientos dinámicamente interesantes y acotados para todo tiempo. Sin estos términos, que se pueden añadir a unas posibles pérdidas difractivas transversales, tales soluciones divergían sistemáticamente.

La deducción de la forma final de las ecuaciones en las que se introduce  $\varepsilon$  se hace de forma completamente análoga a la ya presentada, por lo que nos limitaremos a dar los resultados [Pas93a].

$$-\frac{i}{4}\Delta_{\perp}^{(\rho)}\bar{\vec{F}} + \frac{\partial\bar{\vec{F}}}{\partial\eta} + \frac{\varepsilon' + i\varepsilon''}{v}\frac{\partial\bar{\vec{F}}}{\partial\tau} - \frac{i}{v}(\varepsilon'\delta\Omega' - \Omega'(n^2 - \varepsilon))\bar{\vec{F}} = \frac{1}{v}(\frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0\gamma_{\perp}} + \varepsilon''\frac{\Omega}{2})(\bar{\vec{P}} - \bar{\vec{F}}) \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial\bar{\vec{P}}}{\partial\tau} = -(1+i\Delta')\bar{\vec{P}} + D\bar{\vec{F}} \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial D}{\partial\tau} = -\gamma(D - r + \frac{1}{2}(\bar{\vec{F}} \cdot \bar{\vec{P}}^* + \bar{\vec{F}}^* \cdot \bar{\vec{P}})) \quad (4.65)$$

(siendo  $r=D_0$ ,  $\gamma$  el cociente entre las gammas paralela y transversa). Para mantener una notación uniforme a lo largo de esta memoria hemos llamado  $\mathbf{F}$  a lo que en la referencia [Pas93a] se llama  $\mathbf{E}$  (en ambos casos se trata de la parte lentamente variable del campo eléctrico en la aproximación de la onda rotatoria).

Las ecuaciones (4.63)-(4.65) son la base del tratamiento moderno de la dinámica del láser en aproximación semiclásica. La dificultad de su tratamiento exacto, e incluso numérico, se expresa muy bien diciendo que se trata de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales en 3+1 dimensiones para dos campos vectoriales complejos y uno escalar real, todo ello suplementado, claro está, con las condiciones iniciales y de contorno adecuadas. Es evidente que la obtención de información a partir de las mismas en el caso completamente general es una tarea prácticamente inabordable, incluso con los recursos más avanzados. Sin embargo, se ha logrado obtener gran cantidad de resultados sobre los comportamientos predichos por las mismas resolviéndolas en situaciones simplificadas o dotadas de una alta simetría. Sabemos que los modelos obtenidos truncando las ecuaciones completas predicen la aparición de oscilaciones regulares y también caóticas, pasando por autooscilaciones no amortiguadas de carácter más o menos complejo. El acuerdo cualitativo, y en algunos casos hasta cuantitativo, que se ha obtenido entre dichas predicciones y el comportamiento observado en los láseres reales estudiados en la literatura es ciertamente impresionante, aunque dista de ser completo, y aun subsisten en muchos casos dudas razonables sobre la aplicabilidad de tal o cual modelo concreto a una situación experimental dada.

En lo que respecta al tema de las estructuras transversales de campo, la situación es si cabe más interesante. Y ello debido a que, por un lado, las ecuaciones de Maxwell-Bloch han permitido una primera aproximación sistemática a la comprensión de cómo se generan *dinámicamente* dichas estructuras, y por lo tanto a la elucidación y predicción de algunas propiedades confirmadas por la observación, como la existencia de vórtices ópticos [Bra91a-b], y la aparición de inestabilidades espaciotemporales que pueden conducir a un estado que se debería calificar con toda justicia como de "turbulencia óptica" [Wei92]. El esfuerzo experimental realizado en estos últimos años (digamos desde 1985 hasta el presente) para medir dichas inestabilidades espaciotemporales es muy notable, así como los resultados obtenidos por varios grupos de investigadores activos en este campo. Lo más interesante es probablemente que ahora hay evidencia experimental directa de que a partir de una situación espaciotemporal regular, y variando un parámetro de control adecuado, se puede alcanzar un estado en el que las correlaciones temporal y espacial son muy bajas, y que ésto se extiende a toda la sección transversa del láser [Pas90], [Pas91], [Gue91].

En la sección siguiente vamos a considerar una aproximación que consideramos interesante al tratamiento numérico del sistema (4.63)-(4.65), consistente en investigar una rama de soluciones *exactas* de dicho sistema, obtenida al suponer que la dependencia funcional de las variables  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P}$  y  $D$  de las coordenadas espaciotemporales es a través de la combinación  $s = \tau - \kappa\rho$  (ondas planas no lineales).

### 4.3. Soluciones exactas de las ecuaciones de MB en forma de ondas planas no lineales. Orden y caos temporal en dichas soluciones al variar un parámetro de control y comparación con el experimento

Si en las ecuaciones (4.63)-(4.65) ponemos que las variables  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P}$  y  $D$  dependan de  $\rho$  y  $\tau$  a través de la combinación  $s = \tau - \kappa\rho$ , aquellas se convierten en el siguiente conjunto de *ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales*

$$-i\ddot{\bar{\mathbf{F}}} + (p_5 - ip_4)\dot{\bar{\mathbf{F}}} = ip_7\bar{\mathbf{F}} - p_6(\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{P}}) \quad (4.66)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{P}}} = -(1 + ip_1)\bar{\mathbf{P}} + D\bar{\mathbf{F}} \quad (4.67)$$

$$\dot{D} = -p_2(D - p_3 + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{F}}^* \cdot \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{P}}^*)) \quad (4.68)$$

siendo

$$p_1 = \Delta' \quad (4.69.a)$$

$$p_2 = \frac{\gamma_{//}}{\gamma_{\perp}} \quad (4.69.b)$$

$$p_3 = D_0 = r \quad (4.69.c)$$

$$p_4 = -\frac{\varepsilon''}{k_t^2 v} \quad (4.69.d)$$

$$p_5 = \frac{(\frac{\varepsilon'}{v} - k_t)}{k_t^2} \quad (4.69.e)$$

$$p_6 = \frac{1}{k_t^2 v} \left( \frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0 \gamma_{\perp}} + \varepsilon'' \frac{\Omega}{2} \right) \quad (4.69.f)$$

$$p_7 = \frac{\delta\Omega' \varepsilon' - (n^2 - \varepsilon')\Omega'}{k_t^2 v} \quad (4.69.g)$$

$$k_t^2 = \frac{1}{4}(k_{\xi}^2 + k_{\zeta}^2) \quad (4.69.h)$$

y donde hemos denotado con un punto la derivada con respecto a la variable  $s$ .

Consideramos a continuación soluciones de (4.66)-(4.68) con polarización lineal fija, con lo que, separando los campos  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{P}$  en sus partes real e imaginaria, obtenemos las ecuaciones ( $F=x_1+ix_2$ ,  $P=x_3+ix_4$ ,  $D=x_5$ )

$$\dot{x}_1 = x_6 \quad (4.70)$$

$$\dot{x}_2 = x_7 \quad (4.71)$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 + p_1 x_4 + x_1 x_5 \quad (4.72)$$

$$\dot{x}_4 = -x_4 - p_1 x_3 + x_2 x_5 \quad (4.73)$$

$$\dot{x}_5 = -p_2(x_5 - p_3 + x_1 x_3 + x_2 x_4) \quad (4.74)$$

$$\dot{x}_6 = -p_4 x_6 + p_5 x_7 + p_6(x_2 - x_4) - p_7 x_1 \quad (4.75)$$

$$\dot{x}_7 = -p_4 x_7 - p_5 x_6 - p_6(x_1 - x_3) - p_7 x_2 \quad (4.76)$$

Vamos a estudiar a continuación dicho sistema, intentando extraer del mismo la máxima información posible, con el convencimiento de que al ser soluciones *exactas* de las ecuaciones Maxwell-Bloch originales han de reflejar de alguna forma los comportamientos experimentalmente observados.

El sistema (4.70)-(4.76) se reduce a las conocidas ecuaciones de Lorenz suponiendo que no se consideran efectos transversos y que, además,  $\delta\Omega' = 0$ ,  $\varepsilon'' = 0$  y  $\Delta' = 0$ . De esta forma recuperamos un modelo que ha demostrado ser de importancia capital a la hora de estudiar las inestabilidades temporales en láseres de infrarrojo lejano. Hoy en día se puede afirmar que gracias al trabajo de C.O. Weiss y sus colaboradores, dicho modelo se ha comprobado plenamente de forma experimental dentro de sus límites de validez.

No es difícil demostrar que la única solución estacionaria del sistema (4.70)-(4.76) es  $x_{1e}=x_{2e}=x_{3e}=x_{4e}=x_{6e}=x_{7e}=0$ ,  $x_{5e}=p_3$ . La manera más simple de ver esto es partir de las ecuaciones (4.70)-(4.76) y poner  $d^2\mathbf{F}/ds^2 = d\mathbf{F}/ds = d\mathbf{P}/ds = dD/ds = 0$ , con lo cual obtenemos las relaciones

$$ip_7\bar{\mathbf{F}} = p_6(\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{P}}) \quad (4.77)$$

$$(1 + ip_1)\bar{\mathbf{P}} = D\bar{\mathbf{F}} \quad (4.78)$$

$$p_3 - D = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{F}}^* \cdot \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{P}}^*) \quad (4.79)$$

Evidentemente  $\mathbf{F} = \mathbf{P} = 0$ ,  $D = p_3$  es solución de (4.77)-(4.79), y vamos a comprobar que no existen más (en general). Para ello despejamos  $\mathbf{P}$  en (4.77) y lo sustituimos en (4.78) con lo cual

$$\bar{P} = \frac{p_6 - ip_7}{p_6} \bar{F} \quad (4.80)$$

$$\frac{1}{p_6}(1 + ip_1)(p_6 - ip_7)\bar{F} = D\bar{F} \quad (4.81)$$

esto implica (si  $F \neq 0$  como suponemos) que

$$D = \frac{1}{p_6}(1 + ip_1)(p_6 - ip_7) \quad (4.82)$$

, lo cual es absurdo, ya que  $D$  es real y el miembro de la derecha de (4.82) es complejo en general.

En nuestro caso hemos elegido  $p_7 = 0$ ,  $p_1 \neq 0$  en las integraciones numéricas que se han llevado a cabo, por lo tanto tenemos siempre un único punto de equilibrio. Hemos investigado la estabilidad y el tipo (nodo, foco, punto de silla, ...) de la solución estacionaria linealizando (4.70)-(4.76). La ecuación resultante es ( $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ ).

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_3 & 0 & -1 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & -p_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p_2 & 0 & 0 \\ -p_7 & p_6 & 0 & -p_6 & 0 & -p_4 & p_5 \\ -p_6 & -p_7 & p_6 & 0 & 0 & -p_5 & -p_4 \end{pmatrix} \bar{X} \quad (4.83)$$

El polinomio característico asociado a (4.83) será pues

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_3 & 0 & -1-\lambda & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & -p_1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p_2-\lambda & 0 & 0 \\ -p_7 & p_6 & 0 & p_6 & 0 & -p_4-\lambda & p_5 \\ -p_6 & -p_7 & p_6 & 0 & 0 & -p_5 & -p_4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.84)$$

Si desarrollamos (4.84) por menores correspondientes al elemento (5,5) tendremos

$$-(p_2 + \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_3 & 0 & -1-\lambda & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & -p_1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -p_7 & p_6 & 0 & -p_6 & -p_4-\lambda & p_5 \\ -p_6 & -p_7 & p_6 & 0 & -p_5 & -p_4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.85)$$

Así pues una raíz del polinomio característico es siempre  $\lambda = -p_2$ , obteniéndose las demás por solución de una ecuación polinómica de grado seis correspondiente al determinante que aparece en (4.85).

Debido al gran número de parámetros de control presentes en las ecuaciones (4.70)-(4.76) es evidente que un estudio paramétrico del comportamiento de las mismas es prácticamente imposible. Hemos optado por estudiar dichas ecuaciones para tres valores del parámetro  $p_2 = 1.0, 0.1, 0.01$ . Los valores elegidos para  $p_2$  cubren un amplio espectro de condiciones de operación de láseres reales de  $\text{CO}_2$  (o de gas en general), desde muy baja presión ( $p_2 \approx 1.0$ ) hasta láseres que funcionan a presiones cercanas a la atmosférica ( $p_2 \approx 0.1 - 0.01$ ). Para cada uno de esos valores del parámetro  $p_2$  se ha estudiado la dinámica al variar  $p_6$ , habiéndose elegido éste para ver cuál es el efecto de las pérdidas asociadas a efectos transversos en la dinámica del láser, dado que estamos especialmente interesados en lograr una comprensión mayor de la dinámica espaciotemporal de estos sistemas. Los valores numéricos del resto de los parámetros intentan ajustarse a los esperados en el láser que se estudió experimentalmente en el capítulo 3 de esta memoria. La tabla siguiente resume los valores de los parámetros usados en los tres casos que se han investigado en más detalle.

Parámetros	Caso 1	Caso 2	Caso 3
$p_1$	0.2	0.2	0.2
$p_3$	28.0	40.0	80.0
$p_4$	10.0	10.0	6.0
$p_5$	10.0	10.0	2.0
$p_6$	20.0-100.0	10.0-70.0	4.0-14.0
$p_7$	0.0	0.0	0.0

**Tabla 4.1.** Relación de los parámetros de control usados en los casos en que se ha explorado en detalle el comportamiento del sistema (4.70)-(4.76).

Procederemos a continuación al estudio de cada uno de ellos, usando muchas de las técnicas desarrolladas para el análisis de sistemas no lineales: estabilidad y tipo de los puntos de equilibrio, diagramas de bifurcación de las variables relevantes al cambiar un parámetro de control, evolución de las variables en función del parámetro  $s$ , proyecciones de trayectorias en el espacio de fases del sistema dinámico, cálculo del mayor exponente de Lyapunov, análisis de Fourier y (en algunos casos) utilización del algoritmo de Grassberger-Procaccia para comparar cuantitativamente los resultados obtenidos del modelo teórico con el experimento.

La integración numérica de las ecuaciones se ha llevado a cabo mediante un algoritmo de tipo Runge-Kutta de orden cuatro con control automático del paso de integración y en doble precisión en todos los casos. Los transitorios se han eliminado integrando durante un tiempo suficientemente largo, y la dinámica asintótica se ha comprobado que es tal utilizando pasos de integración más pequeños y viendo si las proyecciones así obtenidas de los atractores son las mismas en forma y posición en el espacio de fases. Los parámetros concretos usados en las integraciones numéricas se discuten en detalle en [Pas93a].

### Caso 1

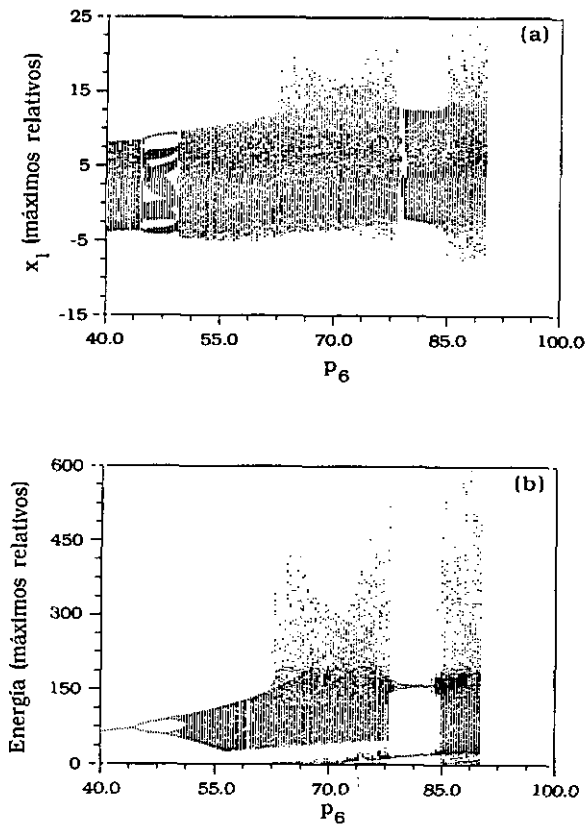
El análisis de los autovalores correspondientes al sistema linealizado (4.83) y sus movimientos en el plano complejo al variar  $p_6$  muestra que en este caso el punto de equilibrio es hiperbólico, es decir, ninguno de sus autovalores tiene parte real igual a cero. Además al existir autovalores con parte real positiva y otros con parte real negativa estamos en presencia de un punto de silla, por lo tanto inestable. Dicha inestabilidad se puede justificar también mediante un razonamiento físico, ya que la solución de equilibrio  $F = P = 0$ ,  $D = p_3$  significa que tenemos campo eléctrico y polarización nulos e inversión de población no nula (y relativamente grande en los casos estudiados), lo cual es claramente inestable, ya que por simple emisión espontánea dicha inversión de población tenderá a decaer (al menos para tiempos cortos) dando origen a un campo eléctrico y una polarización macroscópicos.

Al estar en presencia de un único punto de equilibrio y ser éste hiperbólico y de tipo silla concluimos que la variedad central asociada al mismo es vacía, y por lo tanto la dinámica compleja que describiremos seguidamente se generará cuando las variedades estable e inestable del punto de equilibrio se crucen transversalmente.

En los diagramas de bifurcación de la figura 4.1 está resumida buena parte de las características del sistema para los valores de los parámetros anteriormente referidos. Representamos en ella el diagrama de bifurcación de una componente (la real) del campo eléctrico, obtenido representando para cada valor del parámetro de control los valores de los sucesivos máximos relativos del campo, una vez eliminados los

transitorios (fig. 4.1(a)). Lo mismo se ha hecho en la figura 4.1(b) para la energía, esto es, para  $x_1^2+x_2^2$ . Es interesante señalar que la energía como tal no es una variable que aparezca en las ecuaciones (4.70)-(4.76), pero es sin embargo la más sencilla de medir en los experimentos, y hasta hace poco la única que de hecho se registraba. Sin embargo en un experimento reciente y muy interesante el grupo del Dr. C.O. Weiss ha logrado medir directamente, mediante heterodinación, las componentes del campo eléctrico de un láser de infrarrojo lejano [Tan91, Tan92]. Los resultados obtenidos confirman de una manera brillante que la información aportada simplemente por la medida de la energía es insuficiente para una caracterización completa de la dinámica.

Esta misma conclusión se obtiene del estudio del sistema de ecuaciones (4.70)-(4.76), ya que en la figura 4.1 se observa claramente que los diagramas de bifurcación para el campo y la energía son totalmente distintos.



**Figura 4.1.** Diagramas de bifurcación del campo eléctrico (a) y la energía (b). Obsérvese la gran diferencia entre ambos.

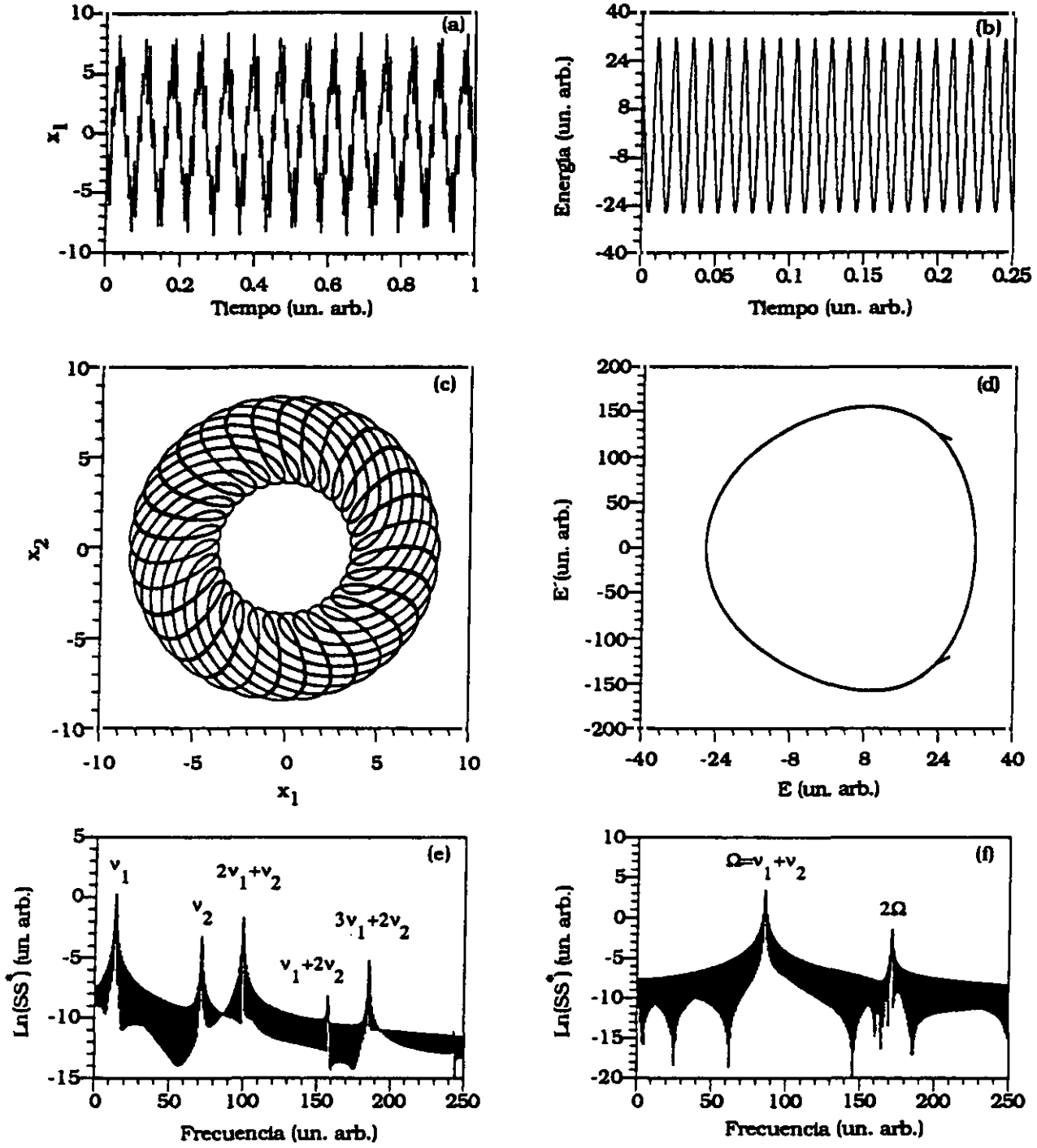
Concretamente en el caso de la energía, y para los valores más pequeños de los considerados para  $p_6$ , se observa una cascada de doblados de periodo que conduce a evoluciones caóticas, con pequeñas ventanas de orden a medida que  $p_6$  crece. El tipo de cambio cualitativo que está sufriendo el campo eléctrico es más difícil de discernir



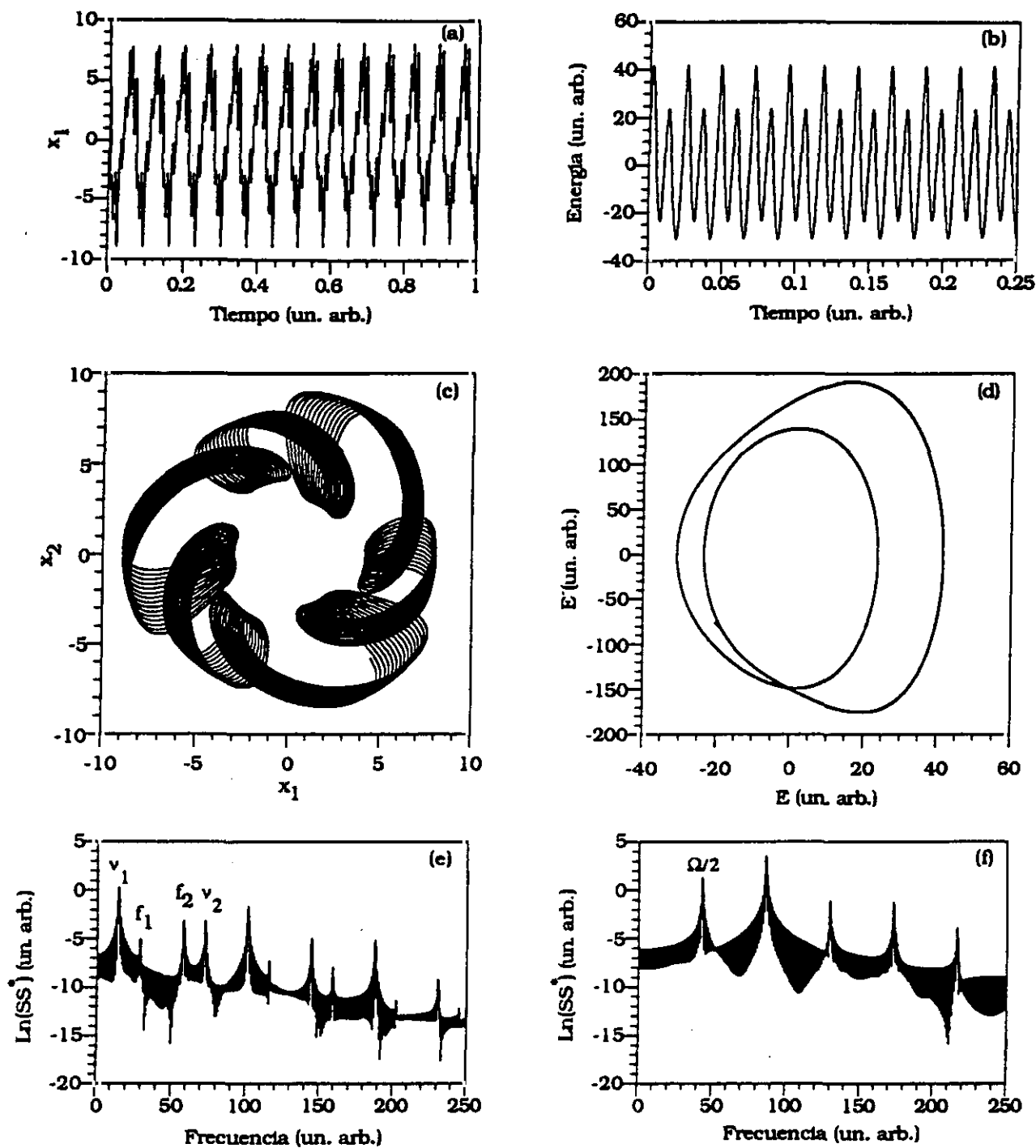
usando solamente el diagrama de bifurcación, por lo que vamos a presentar más información mostrando cómo son las series temporales, los espectros y los atractores correspondientes al campo y la energía para unos cuantos valores seleccionados del parámetro de control  $p_6$ . En las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 ( $p_6 = 40, 45, 50$  respectivamente) vemos que a partir de la proyección en el plano  $x_1$ - $x_2$  y del espectro de Fourier podemos concluir que el campo eléctrico oscila con un movimiento cuasiperiódico con dos frecuencias básicas irracionales entre sí, y con combinaciones enteras particulares de las mismas. Tanto las frecuencias de base como las combinaciones enteras de las mismas que aparecen en el espectro de Fourier cambian cuando la energía sufre una bifurcación por doblado de periodo. Al continuar aumentando  $p_6$ , tanto el campo eléctrico como la energía llegan a un estado caótico con espectros de banda ancha y complicados atractores en el espacio de fases (figura 4.5).

La evidencia suministrada por los diagramas de bifurcación, junto con la aportada por las figuras 4.2-4.5, muestra que en nuestro sistema las variables de campo eléctrico siguen una variante de la ruta al caos propuesta por D. Ruelle y F. Takens, que consiste en que una solución periódica se desestabiliza dando lugar a un movimiento cuasiperiódico (con dos frecuencias básicas generalmente inconmensurables entre sí y combinaciones lineales de las mismas), cuya proyección en el espacio de fases es topológicamente equivalente a un toro. Este atractor a su vez, en una nueva bifurcación, da lugar genéricamente a un atractor extraño. Sin embargo la energía (módulo al cuadrado del campo eléctrico) sigue *otra ruta* al caos también muy conocida y estudiada: la cascada subarmónica o doblado de periodo.

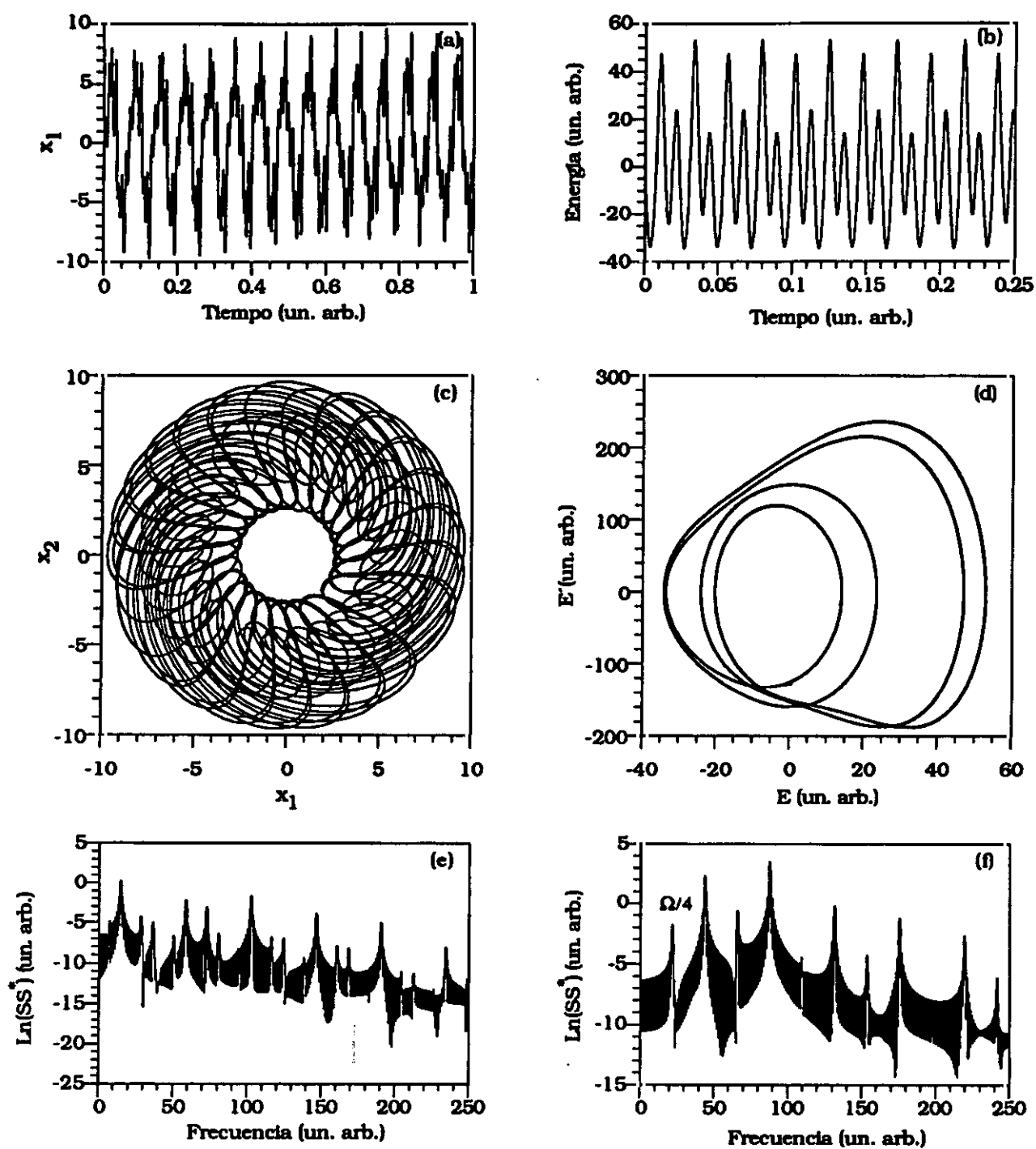
Como hemos visto más arriba, un estudio detallado de las ecuaciones (4.70)-(4.76) muestra que entre la primera bifurcación y el caos existe toda una serie de nuevas bifurcaciones que se caracterizan por doblar el periodo de la energía y de la inversión de población, y por añadir a la estructura espectral del campo y la polarización nuevas series de picos construidas según el mismo patrón que las ya existentes. Es notable asimismo el hecho de que las nuevas frecuencias base de dichas series estén relacionadas racionalmente con las antiguas, de manera que en cuanto al número de frecuencias de base irracionales entre sí, éste no cambia, con lo cual nos mantenemos en el marco de la vía al caos Ruelle-Takens, pero con una rica estructura suplementaria. Si realizamos una sección de Poincaré de las variables de campo usando un hiperplano localmente transversal al flujo generado por (4.70)-(4.76), las bifurcaciones de dichas variables corresponden a desdoblamientos sucesivos de una variedad inicial que se proyecta en el plano  $x_1$ - $x_2$  como un círculo deformado. Esta estructura de las bifurcaciones cuasiperiódicas al observarlas mediante una sección de Poincaré ha recibido en la literatura el nombre de *doblado de toro* (figura 4.6). Nos parece digno de destacar el hecho de que, vistas bajo una sección de Poincaré, las bifurcaciones del campo eléctrico (y de la polarización) son muy similares a la muy



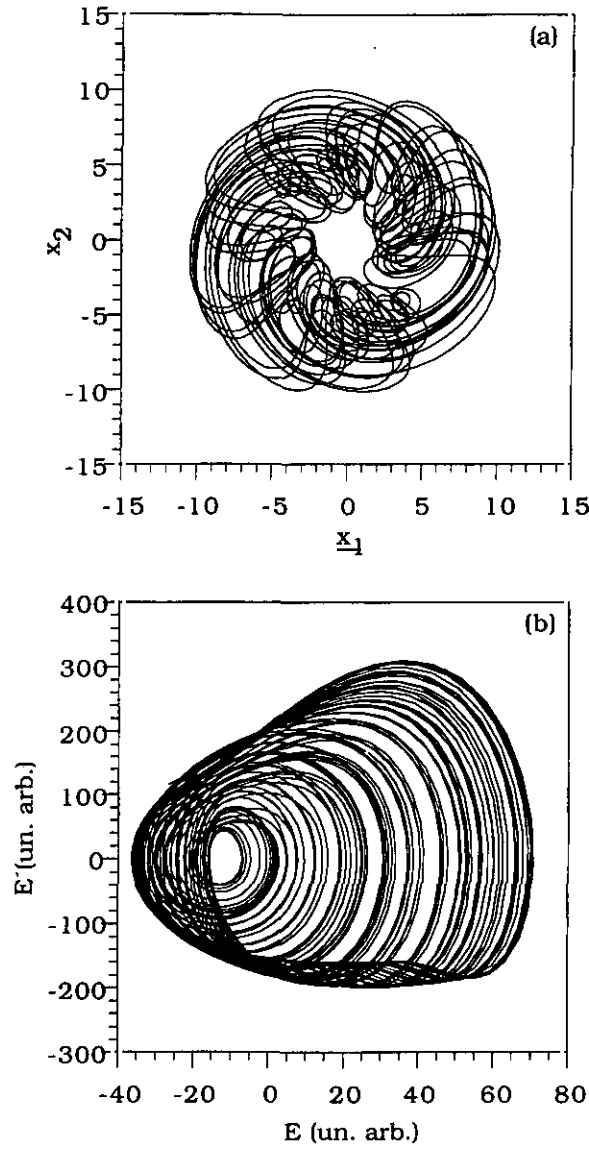
**Figura 4.2.** Evolución temporal del campo eléctrico y la energía (a), (b), sus correspondientes atractores (c), (d) y espectros de Fourier (e), (f) para  $p_6 = 40.0$ .



**Figura 4.3.** Evolución temporal del campo eléctrico y la energía (a), (b), sus correspondientes atractores (c), (d) y espectros de Fourier (e), (f) para  $p_6 = 45.0$ .



**Figura 4.4.** Evolución temporal del campo eléctrico y la energía (a), (b), sus correspondientes atractores (c), (d) y espectros de Fourier (e), (f) para  $p_6 = 50.0$ .

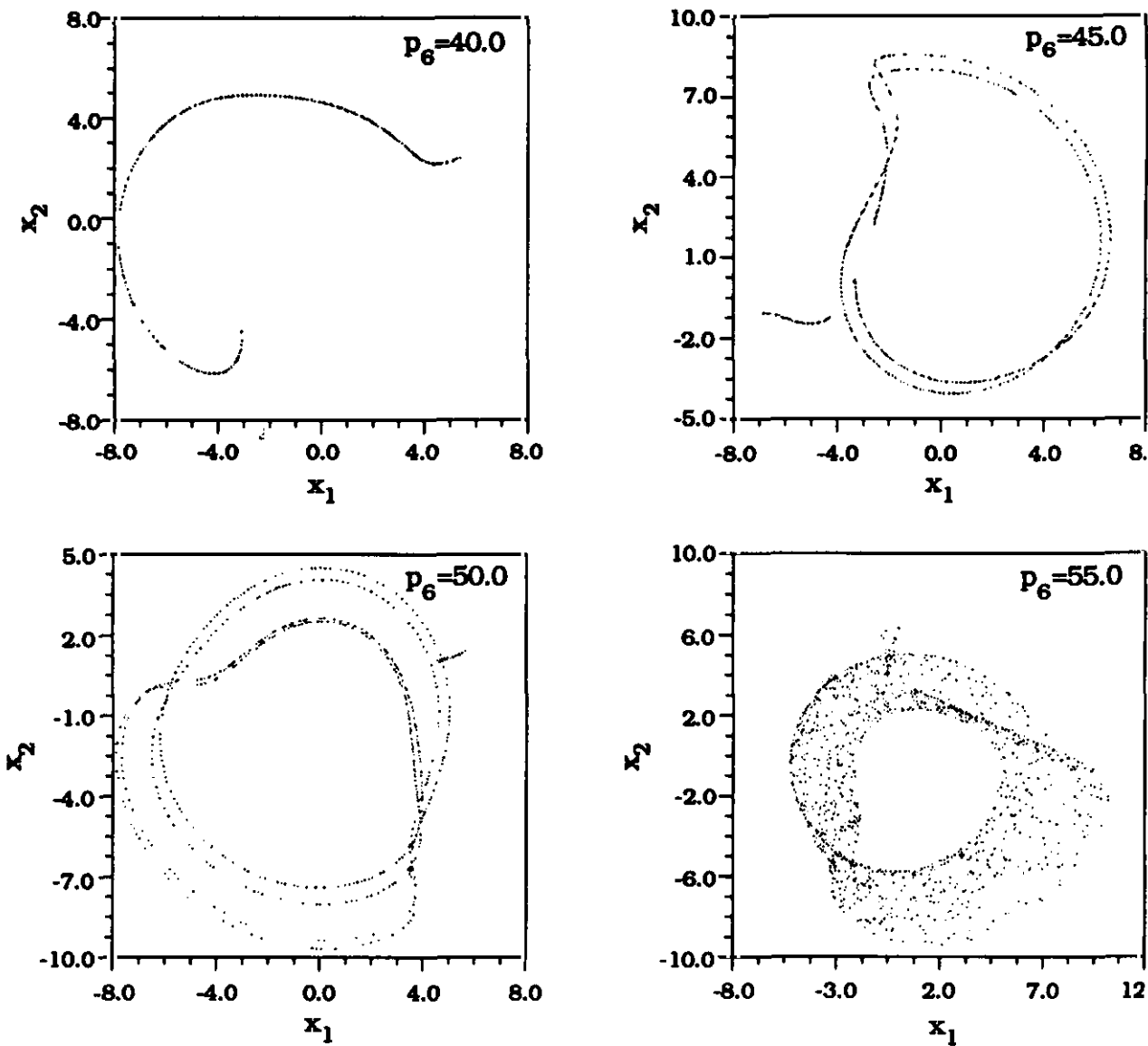


**Figura 4.5.** Atractores extraños del campo y la energía ((a) y (b) respectivamente) para  $p_6 = 55.0$ .

conocida bifurcación por doblado de periodo, y el que en las ecuaciones (4.70)-(4.76) ambas vías al caos aparezcan estrechamente ligadas y se manifiesten simultáneamente.

Una primera conclusión que se obtiene de estos resultados es que no es posible en general saber cuál es la ruta al caos que siguen las variables de un sistema físico mediante la medida de una magnitud derivada de las mismas. En particular, en dinámica láser no es posible mantener, sin otros diagnósticos adicionales, que la

energía y el campo eléctrico sigan una misma ruta al caos. Más bien lo contrario es lo que señala la teoría y algunos experimentos recientes [Zeg88], [Vil90], [Tan91], [Tan92].



**Figura 4.8.** Secciones de Poincaré localmente transversales a la solución estacionaria de las ecuaciones, y que muestran que el campo eléctrico sufre en cada bifurcación un doblado de toro.

Como sabemos, se dice que un sistema posee la propiedad del caos determinista cuando al menos uno de sus exponentes de Lyapunov es estrictamente positivo. Los exponentes de Lyapunov miden la tasa de divergencia exponencial (si es mayor que cero) o de convergencia (si es menor que cero) de una pequeña perturbación inicial de

una órbita predeterminada. Si uno de los exponentes es positivo significa que pequeños cambios en las condiciones iniciales de partida se amplifican enormemente en el transcurso del tiempo, dando lugar a la extrema sensibilidad de los sistemas caóticos con respecto a las condiciones iniciales de preparación. Dicha sensibilidad tiene como consecuencia la imposibilidad práctica de una predicción detallada del comportamiento del sistema para tiempos grandes ( $t \rightarrow \infty$ ), ya que implicaría mantenerlo aislado de las más mínimas influencias perturbadoras y además conocer el estado inicial con precisión prácticamente infinita. Por supuesto, ambos extremos son irrealizables en la práctica. Hemos de señalar sin embargo que esta imposibilidad de predicción detallada de una órbita o evolución temporal individual no impide en absoluto el tratamiento estadístico cuantitativo de los sistemas caóticos [Eck85].

En nuestro caso hemos calculado el mayor exponente de Lyapunov del flujo engendrado por las ecuaciones (4.70)-(4.76) al variar el parámetro  $p_6$ . Los resultados para el caso que estamos discutiendo se muestran en la figura 4 de [Pas93a].

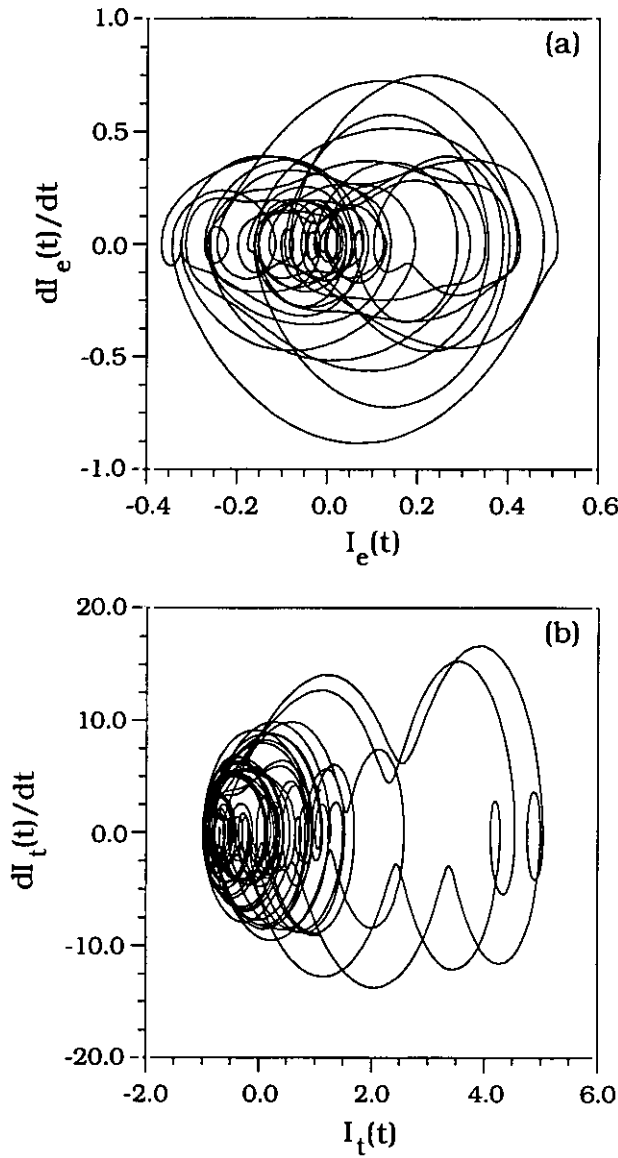
Podemos apreciar que el umbral de la transición orden-caos se da para  $p_6 \approx 50.0$ , y que para valores mayores de dicho parámetro el comportamiento es caótico salvo en dos ventanas, una muy estrecha alrededor de  $p_6 \approx 60.0$  y otra más ancha alrededor de  $p_6 = 80-85$ . Las conclusiones obtenidas a partir del cálculo del mayor exponente de Lyapunov coinciden con lo que se observa en el diagrama de bifurcación de la energía (especialmente en lo que atañe a las ventanas de orden alrededor de los valores 60 y 80 del parámetro de control  $p_6$ ), y se confirman asimismo mediante integraciones numéricas realizadas en estas ventanas del parámetro  $p_6$ .

Nos encontramos en nuestro sistema de ecuaciones con una situación bien conocida y estudiada en muchos otros, como es la existencia de franjas de comportamiento regular inmersas en un fondo de comportamiento caótico. Cuando estas franjas o ventanas sean de anchura relativamente grande en el espacio de parámetros serán relevantes experimentalmente, ya que el comportamiento previsto será estable frente a cambios pequeños del parámetro de control. Sin embargo las franjas de orden muy estrechas, que pueden asimismo estar presentes, a pesar de su indudable interés teórico, pueden no ser relevantes desde un punto de vista experimental, dados los errores intrínsecos en la determinación de los parámetros de control, cuyos valores además están siempre fluctuando ligeramente alrededor de un valor medio debido a la presencia inevitable de ruidos de naturaleza estocástica.

En los casos estudiados los resultados numéricos indican que las ventanas de orden surgen mediante una cascada inversa (fenómeno inverso a la cascada subarmónica), si atendemos al comportamiento de la intensidad luminosa.

A tenor de los interesantes resultados numéricos obtenidos hemos intentado la comparación con los datos experimentales del láser de  $\text{CO}_2$  cuando funciona en régimen caótico (véase el capítulo 3 para más detalles sobre el experimento). La idea de

comparar los resultados numéricos y experimentales la sugirió en un principio la similaridad entre el atractor de la energía calculado por integración de las ecuaciones y el obtenido mediante reconstrucción del mismo a partir de los datos de intensidad registrados en el experimento (figura 4.7).



**Figura 4.7.** Comparación teoría experimento en cuanto a la forma de los atractores de la energía.

Sin embargo, la similaridad de ambas reconstrucciones es sólo un argumento heurístico que señala, tal vez, la posible aplicabilidad del modelo considerado al caso del láser de  $\text{CO}_2$ . Para hacer una comparación cuantitativa de la teoría con el experimento hemos aplicado el algoritmo de Grassberger-Procaccia a señales



procedentes de la integración numérica de las ecuaciones (energía) y a señales reconstruidas finamente mediante la aplicación de la transformada de Fourier inversa. Dicha técnica consiste en obtener en primer lugar un espectro de Fourier de alta resolución de una señal experimental concreta. Una vez obtenido dicho espectro, y eliminada la parte de muy alta frecuencia para atenuar el ruido, se procede al cálculo numérico de la transformada inversa de Fourier en un número suficiente de puntos temporales, de forma que se obtengan valores de la señal en instantes de tiempo en los que no se habían tomado medidas. Esta técnica es un tipo particular de interpolación.

Mediante el algoritmo GP se han explorado dimensiones de recubrimiento desde seis hasta doce, con el resultado de una buena convergencia de la pendiente hacia un valor de  $\approx 2.7$  tanto para los datos experimentales como para los procedentes de las simulaciones [Pas93a].

El acuerdo obtenido para el valor de la dimensión de correlación nos confirma en la opinión de que el modelo simplificado dado por las ecuaciones (4.70)-(4.76) captura algunos de los elementos esenciales de la dinámica del láser de  $\text{CO}_2$  estudiado.

El valor relativamente bajo encontrado experimentalmente para la dimensión de correlación indica que nos encontramos con un caso de caos determinista de baja dimensionalidad, a pesar de que la dinámica completa se describe mediante un sistema de dimensión infinita (ecuaciones en derivadas parciales de Maxwell-Bloch). Al hacer esta observación queremos dejar claro que no es en absoluto evidente que un modelo simplificado como el aquí expuesto tenga que recoger los aspectos más importantes de nuestros experimentos; este es un punto que sólo la comparación detallada entre la práctica y la teoría puede decidir, pero que no es fácil de establecer *a priori*.

Antes de pasar a describir los otros casos mencionados más arriba quisiéramos discutir brevemente las condiciones en que el modelo dado por (4.70)-(4.76) sería aplicable a los experimentos de física del láser. Puesto que al considerar las soluciones de (4.70)-(4.76) nos hemos mantenido siempre en el marco de un problema de condiciones iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias, las condiciones de contorno no han sido utilizadas en esta aproximación, considerándose en cambio un problema de tipo Cauchy, ésto es, dados en un tiempo fijo los campos eléctricos, polarización e inversión de población en  $\mathbf{R}^3$  (o en un subconjunto experimentalmente relevante del mismo) se calculan esas mismas magnitudes en instantes sucesivos. Como además estamos suponiendo que las soluciones son en forma de ondas planas (no lineales) hemos de considerar como condición inicial una perturbación espacialmente periódica con frente de onda plano dado por  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = 0$  (ó  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = \text{cte}$  en general).

Por las consideraciones anteriores pensamos que un sistema que podría ser modelado razonablemente bien por las ecuaciones (4.70)-(4.76) sería un dispositivo

consistente en un oscilador láser construido de tal forma que las dimensiones transversales del medio amplificador fuesen mucho mayores que la sección transversal del campo del oscilador. Al haber considerado que las dimensiones transversales del amplificador son mucho mayores que las de la zona de coherencia transversa del campo del oscilador es razonable pensar que las condiciones de contorno no serian críticas.

## Caso 2

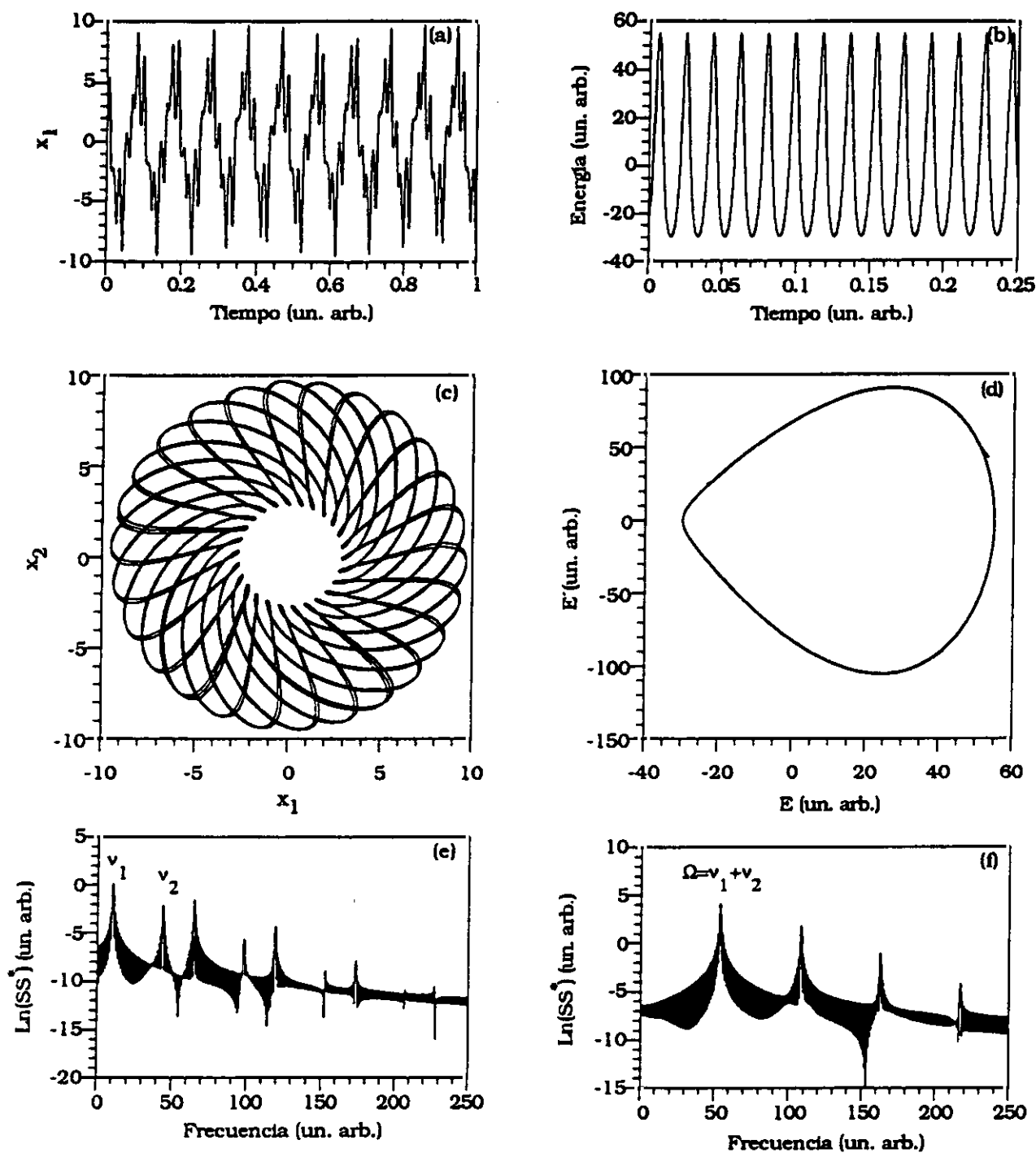
Como ocurría en el caso 1, el estudio de la estabilidad lineal del único punto de equilibrio existente muestra que se trata de un punto de silla hiperbólico para todos los valores del parámetro  $p_6$  en el rango estudiado.

La información relevante acerca de los primeros cambios en la dinámica del campo eléctrico y la energía al ir variando el parámetro de control se resume en las figuras 4.8-4.10.

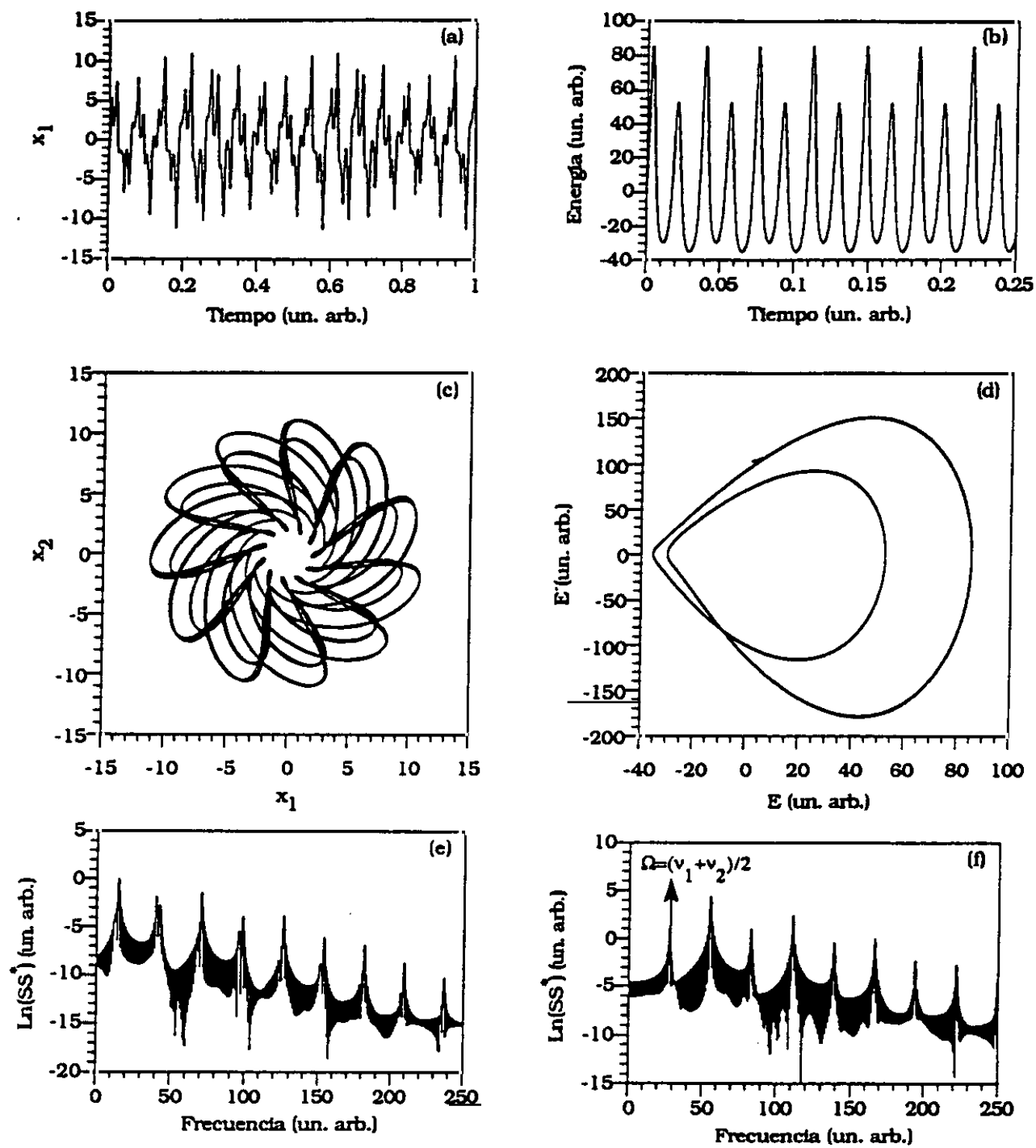
Como se puede observar en las mismas, encontramos para dichas variables el mismo patrón de bifurcaciones que en el caso 1, esto es, mientras que la energía sufre sucesivos doblados de periodo el campo eléctrico efectúa un movimiento cuasiperiódico con dos frecuencias básicas irracionales entre sí (en general), y combinaciones lineales enteras de las mismas del tipo  $j(\nu_1 + \nu_2) + \nu_2, j(\nu_1 + \nu_2) + \nu_1, j = 1, 2, 3, \dots$ , a las que se añaden nuevas series de picos de frecuencia, organizadas de la misma forma, cada vez que se produce un doblado de periodo de la energía. Las nuevas frecuencias base están relacionadas racionalmente con las antiguas, lo mismo que ocurría en el caso 1.

Los diagramas de bifurcación de la energía y el valor del mayor exponente de Lyapunov al variar  $p_6$  muestran que existen también en este caso ventanas de orden (relativamente grandes) dentro del comportamiento caótico. Es de notar que una de las más importantes, situada para valores de  $p_6$  comprendidos entre 52.5 y 65.0, muestra claramente que la energía sufre una cascada inversa desde un comportamiento caótico a otro ordenado (véase [Pas93a]). Acompañando a los cambios en el comportamiento de la energía, el espectro de Fourier del campo eléctrico cambia también, eliminandose en cada bifurcación inversa una serie completa de picos espectrales organizados según las relaciones ya conocidas  $k(f_1+f_2)+f_2, k(f_1+f_2)+f_1, k = 1, 2, 3, \dots$

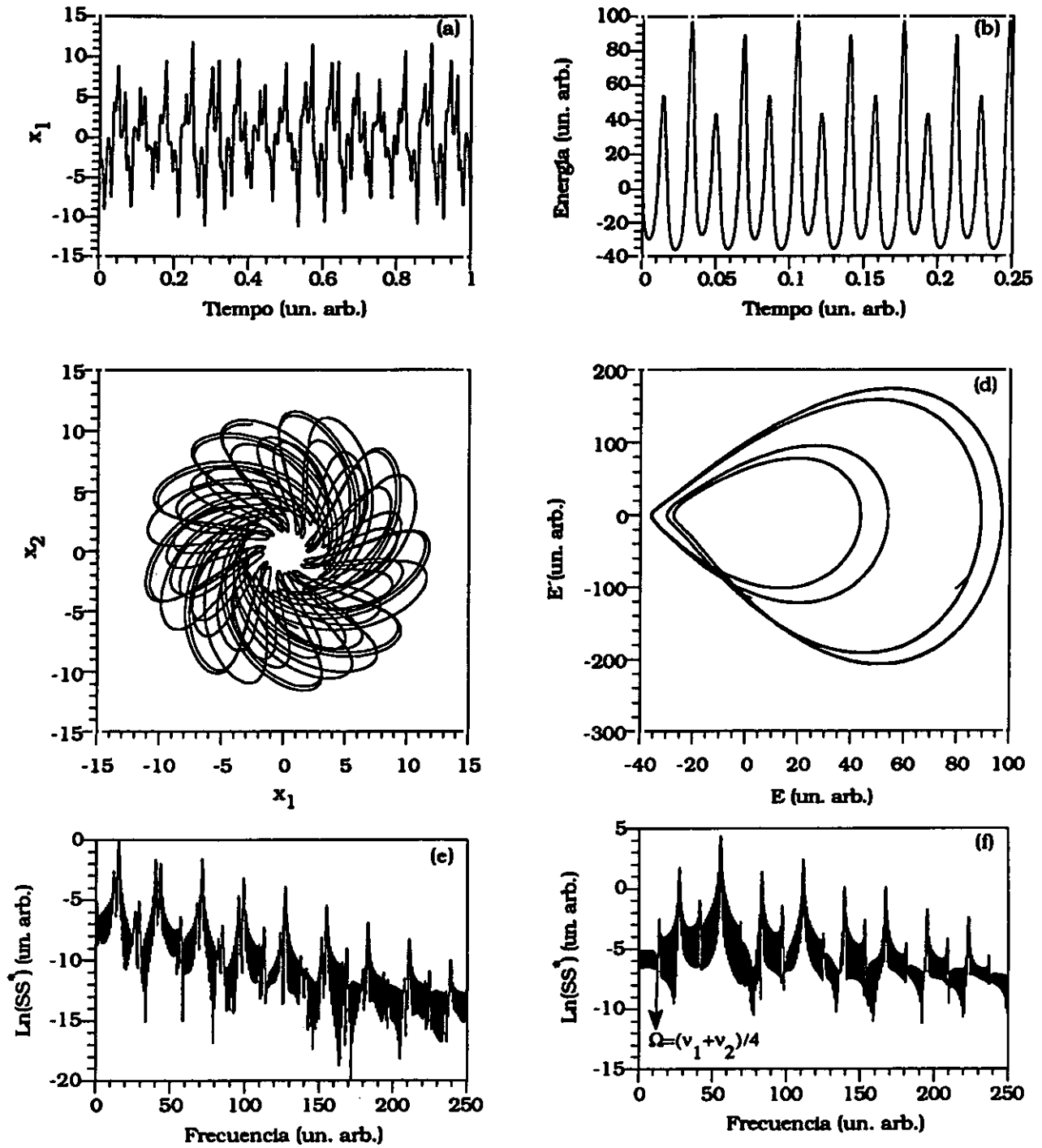
En resumen, podemos decir que en este caso, y a pesar de que los valores de los parámetros de control son muy distintos a los del caso 1, se producen bifurcaciones en el campo eléctrico y la energía que siguen el mismo patrón. En particular, la relación entre las primeras bifurcaciones por doblado de periodo en la energía y los cambios correspondientes en la estructura de frecuencias y combinaciones lineales de éstas del campo eléctrico es la misma.



**Figura 4.8.** Series temporales (a), (b), atractores (c), (d), y espectros de Fourier (e), (f) correspondientes al campo y la energía para  $p_6 = 23.0$ .



**Figura 4.9.** Series temporales (a), (b), atractores (c), (d), y espectros de Fourier (e), (f) correspondientes al campo y la energía para  $p_6 = 26.0$ .



**Figura 4.10.** Series temporales (a), (b), atractores (c), (d), y espectros de Fourier (e), (f) correspondientes al campo y la energía para  $p_6 = 29.0$ .

### Caso 3

En el tercero de los casos estudiados, el más próximo al experimento en cuanto a los valores de los parámetros de control, hemos vuelto a encontrar los mismos tipos de comportamientos cualitativos que en los dos anteriores. Se vuelve a dar la circunstancia de que las primeras bifurcaciones de la energía se producen mediante doblados de periodo, mientras que el campo sigue una vía de doblado de toro al caos, con las peculiaridades señaladas más arriba. Quizá resulte interesante señalar que en los tres casos, para valores del parámetro  $p_6$  aun más pequeños que los consignados en la tabla 4.1, el campo eléctrico muestra un comportamiento tipo ciclo límite y la energía tiende a un valor constante.

A partir de los resultados citados en el capítulo 1 para las ecuaciones de Lorenz complejas y los vistos en este mismo capítulo podemos concluir que los mecanismos o rutas al caos de la energía y el campo eléctrico en una clase de modelos del láser muy amplia son diferentes, siendo para la primera el doblado de periodo y para el segundo el doblado de toro. Lo cual sugiere a su vez que estas vías al caos distintas han de ser una propiedad *general* de todos los modelos que deriven de las ecuaciones de Maxwell-Bloch respetando su estructura matemática en lo concerniente a los términos no lineales que aparecen en sus segundos miembros y al carácter complejo de los campos  $F$  y  $P$ .

Para precisar más estas afirmaciones nos centraremos en el análisis del modelo de Lorenz complejo dado por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{F} &= -p_1(1 + ip_2)F - p_1p_3P \\ \dot{P} &= -(1 + ip_4)P - DF \\ \dot{D} &= -p_5(D - 1) + \frac{p_5}{2}(FP^* + F^*P) \end{aligned} \right\} \quad (4.86)$$

, donde ahora denotamos por un punto la derivación con respecto al tiempo adimensional definido en (1.10). Hemos introducido además la notación

$$p_1 = \kappa / \gamma_{\perp}; p_2 = \delta; p_3 = A; p_4 = \Delta; p_5 = \gamma_{\parallel} / \gamma_{\perp}. \quad (4.87)$$

El sistema de ecuaciones (4.86) verifica la siguiente propiedad (simetría de fase o *gauge*): sea  $F(\tau)$ ,  $P(\tau)$ ,  $D(\tau)$  una solución del mismo (supondremos que en dicha solución ya se han eliminado los transitorios) correspondiente a los valores de los parámetros de control  $p_1, \dots, p_5$ . Consideremos las variables

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}(\tau) &= e^{i\omega\tau} \mathbf{F}(\tau) \\ \mathbf{P}(\tau) &= e^{i\omega\tau} \mathbf{P}(\tau) \\ \mathbf{D}(\tau) &= \mathbf{D}(\tau); \omega \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (4.88)$$

. Entonces, las variables definidas por (4.88) satisfacen también el sistema (4.86), pero para unos nuevos valores de los parámetros de control  $p'_1, \dots, p'_5$  dados por

$$p'_1 = p_1; p'_2 = p_2 - \frac{\omega}{p_1}; p'_3 = p_3; p'_4 = p_4 - \omega; p'_5 = p_5 \quad (4.89)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= i\omega\mathbf{F} + e^{i\omega\tau}\dot{\mathbf{F}} = i\omega\mathbf{F} + e^{i\omega\tau}\{-p_1(1+ip_2)\mathbf{F} - p_1p_3\mathbf{P}\} = \\ &= i\omega\mathbf{F} - p_1(1+ip_2)\mathbf{F} - p_1p_3\mathbf{P} = -p_1(1+i(p_2 - \omega/p_1))\mathbf{F} - p_1p_3\mathbf{P} \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= i\omega\mathbf{P} + e^{i\omega\tau}\dot{\mathbf{P}} = i\omega\mathbf{P} + e^{i\omega\tau}\{-(1+ip_4)\mathbf{P} - \mathbf{D}\mathbf{F}\} = \\ &= i\omega\mathbf{P} - (1+ip_4)\mathbf{P} - \mathbf{D}\mathbf{F} = -(1+i(p_4 - \omega))\mathbf{P} - \mathbf{D}\mathbf{F} \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}} = -p_5(\mathbf{D} - 1) + \frac{p_5}{2}(\mathbf{F}^*\mathbf{P} + \mathbf{F}\mathbf{P}^*) \quad (4.92).$$

Vamos a establecer a continuación las soluciones que verifican las ecuaciones (4.86).

Pongamos

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}(\tau) &= e^{i\eta\tau} \sum_n f_n e^{in\Omega\tau}; n \in \mathbb{Z}, f_n \in \mathbb{C} \\ \mathbf{P}(\tau) &= e^{i\eta\tau} \sum_n \pi_n e^{in\Omega\tau}; n \in \mathbb{Z}, \pi_n \in \mathbb{C} \\ \mathbf{D}(\tau) &= \sum_n d_n e^{in\Omega\tau}; n \in \mathbb{Z}, d_n = d_{-n}^* \end{aligned} \right\} \quad (4.93)$$

con

$$\eta = \omega_1; \Omega = \omega_1 + \omega_2 \quad (4.94),$$

siendo  $\omega_1, \omega_2$  las frecuencias base del espectro del campo eléctrico. Decimos que  $\mathbf{F}(\tau)$ ,  $\mathbf{P}(\tau)$  y  $\mathbf{D}(\tau)$  satisfacen (formalmente) las ecuaciones (4.86). En efecto, sustituyendo (4.93) en (4.86) se obtiene una identidad suponiendo que se verifican las infinitas relaciones algebraicas siguientes

$$\begin{aligned}
\{p_1(1 + i(p_2 + \eta / p_1)) + i\Omega\}f_n &= -p_1 p_3 \pi_n \\
\{1 + i(p_4 + \eta) + i\Omega\}\pi_n &= -\sum_{l \in \mathbb{Z}} f_l d_{n-l} \\
\{p_5 + i\Omega\}d_n &= p_5 \delta_{n0} + \frac{p_5}{2} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m \pi_{n+m}^* + \text{c.c.} \right)
\end{aligned} \tag{4.95}$$

El carácter formal de las soluciones propuestas es evidente a partir de (4.95), pues para probar que lo son en sentido estricto tendríamos que resolver esta jerarquía de ecuaciones algebraicas no lineales acopladas, y a partir de los valores obtenidos para  $f_n$ ,  $\pi_n$  y  $d_n$  comprobar la convergencia de las series correspondientes. Nuestra confianza en que existen de hecho soluciones asintóticas (atractores) de la forma (4.93) proviene de la integración numérica de las ecuaciones del modelo para una gama muy amplia de parámetros de control. Una vez dejados pasar los transitorios, las soluciones así obtenidas coinciden en sus características con las propuestas en forma de series infinitas.

Antes de revisar los resultados numéricos obtenidos del modelo quisiéramos hacer unos comentarios sobre el contenido de las ecuaciones (4.95).

Nos hemos permitido llamar a estas relaciones *relaciones de dispersión de las ecuaciones de Lorenz complejas*, dado que una vez fijados los parámetros de control, (4.95) deberían determinar de manera autoconsistente los valores de los coeficientes  $f_n$ ,  $\pi_n$  y  $d_n$ , así como los de las frecuencias  $\eta$  y  $\Omega$ . La existencia de esta correspondencia unívoca desde los valores de los parámetros de control a los coeficientes y frecuencias se induce a partir de la observación, en todos los casos estudiados, de que sólo existe una solución asintótica (atractor) una vez fijados los primeros. Por supuesto que las relaciones (4.95) son válidas únicamente en las zonas del espacio de parámetros en las que existen soluciones ordenadas (esto es, no caóticas), al igual que sólo en dichas zonas tiene sentido hablar de soluciones formales del tipo indicado.

Aunque la solución analítica de las ecuaciones (4.95) parece imposible, o al menos extremadamente difícil, lo que sí parece factible es suponer que nada más que un número finito (y relativamente pequeño) de los coeficientes  $f_n$ ,  $\pi_n$  y  $d_n$  son diferentes de cero, y resolver por tanto un número restringido de ecuaciones de (4.95), calculando al mismo tiempo  $\eta$  y  $\Omega$  como funciones de  $p_1, \dots, p_5$ . Esto permitiría un cálculo aproximado de las frecuencias que aparecen en el campo y la intensidad, y las amplitudes máximas de estas cantidades por una vía independiente de la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales (4.86). Esperamos poder abordar este tipo de cálculos en un futuro próximo.



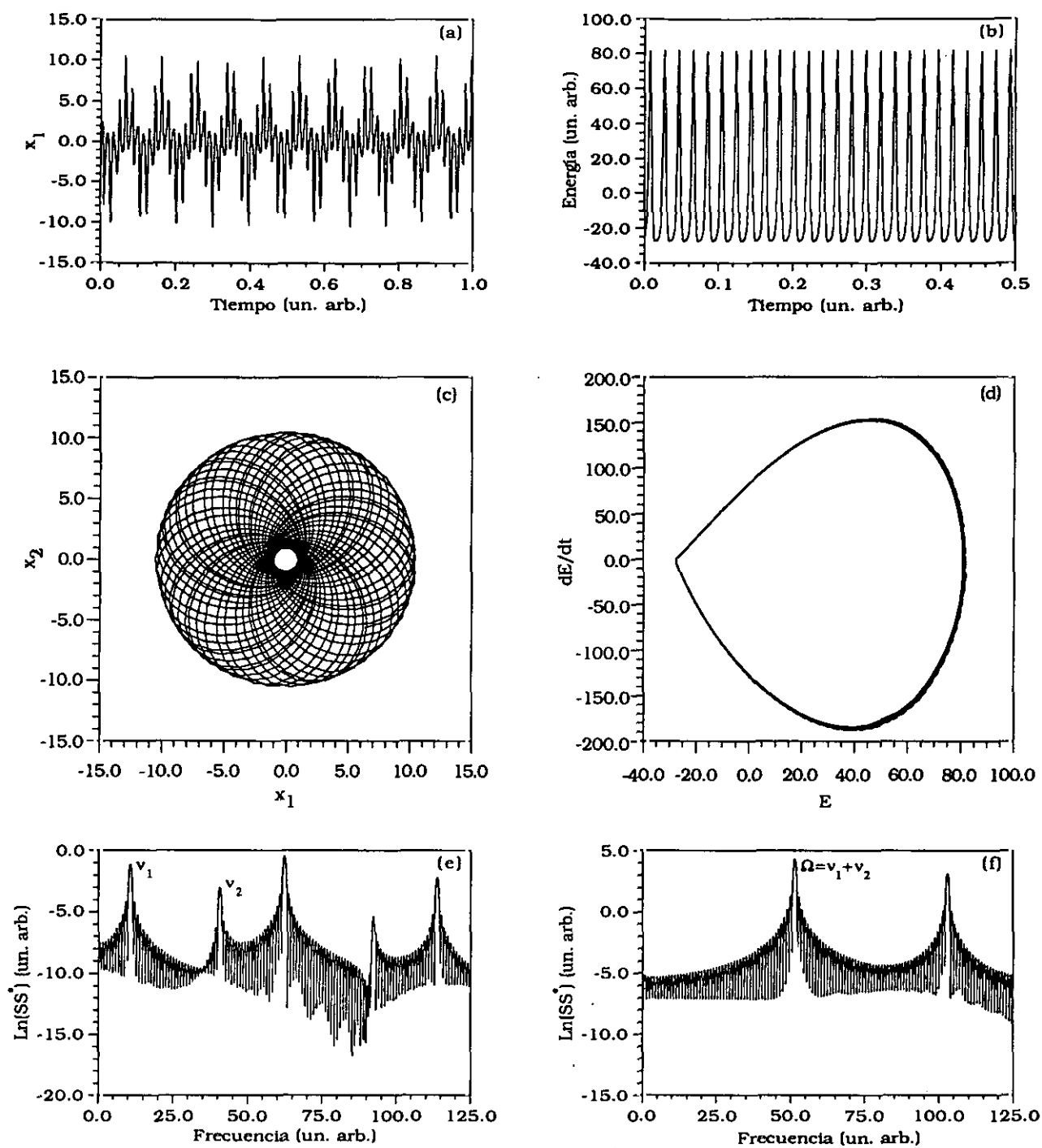
Las figuras siguientes muestran los resultados de la integración de (4.86) para unos valores de los parámetros de control dados por  $p_1=2.0$ ,  $p_3=15.0$ ,  $p_4=2.0$ ,  $p_5=0.25$  y  $p_2$  en el intervalo  $[0.5, 0.8]$ .

Las figuras 4.11-4.13 muestran la evolución temporal de las soluciones para el campo eléctrico (parte real) y la energía, la reconstrucción en el espacio de fase de los atractores del campo y la energía y sus espectros de Fourier para tres valores del parámetro  $p_2$ , iguales respectivamente a 0.50, 0.675 y 0.70.

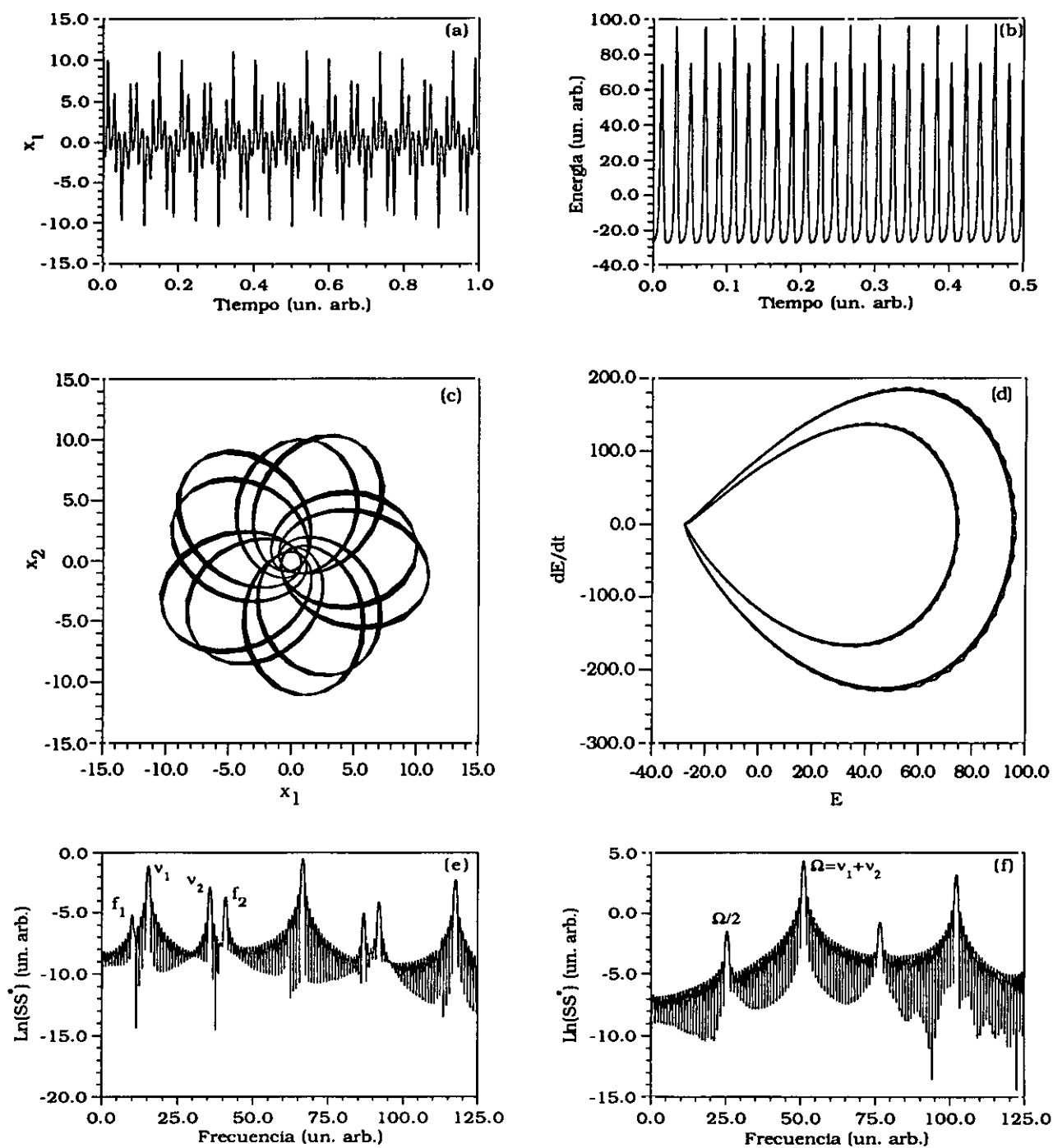
El doblado de periodo en la energía es evidente a partir de los paneles (d) de las figuras 4.11-4.13. En cuanto al carácter de la bifurcación del campo eléctrico, el espectro del mismo antes de producirse la primera bifurcación por doblado de periodo de la energía presenta dos frecuencias base  $\nu_1, \nu_2$  y sus combinaciones de la forma ya citada  $n(\nu_1+\nu_2)+\nu_1$ ,  $n(\nu_1+\nu_2)+\nu_2$ . Se observa además que  $\Omega=\nu_1+\nu_2$ , donde  $\Omega$  representa la frecuencia fundamental del espectro de la energía. Tras la bifurcación aparecen dos nuevos picos en el espectro del campo y sus correspondientes combinaciones lineales de la misma forma que las anteriores. Al estar relacionadas las frecuencias aparecidas tras la bifurcación con las ya existentes mediante combinaciones lineales con coeficientes racionales, no se incrementa el número de frecuencias base mutuamente irracionales entre sí. El comportamiento de la polarización y de la inversión de población es cualitativamente similar al del campo eléctrico y la intensidad respectivamente, con las frecuencias de sus espectros situadas exactamente en las mismas posiciones que las de las variables correspondientes.

Una comprobación adicional y muy gráfica del doblado de periodo para el campo eléctrico la obtenemos calculando la sección de Poincaré de las ecuaciones de Lorenz complejas. La figura 4.14 resume toda la información correspondiente a los casos discutidos más arriba.

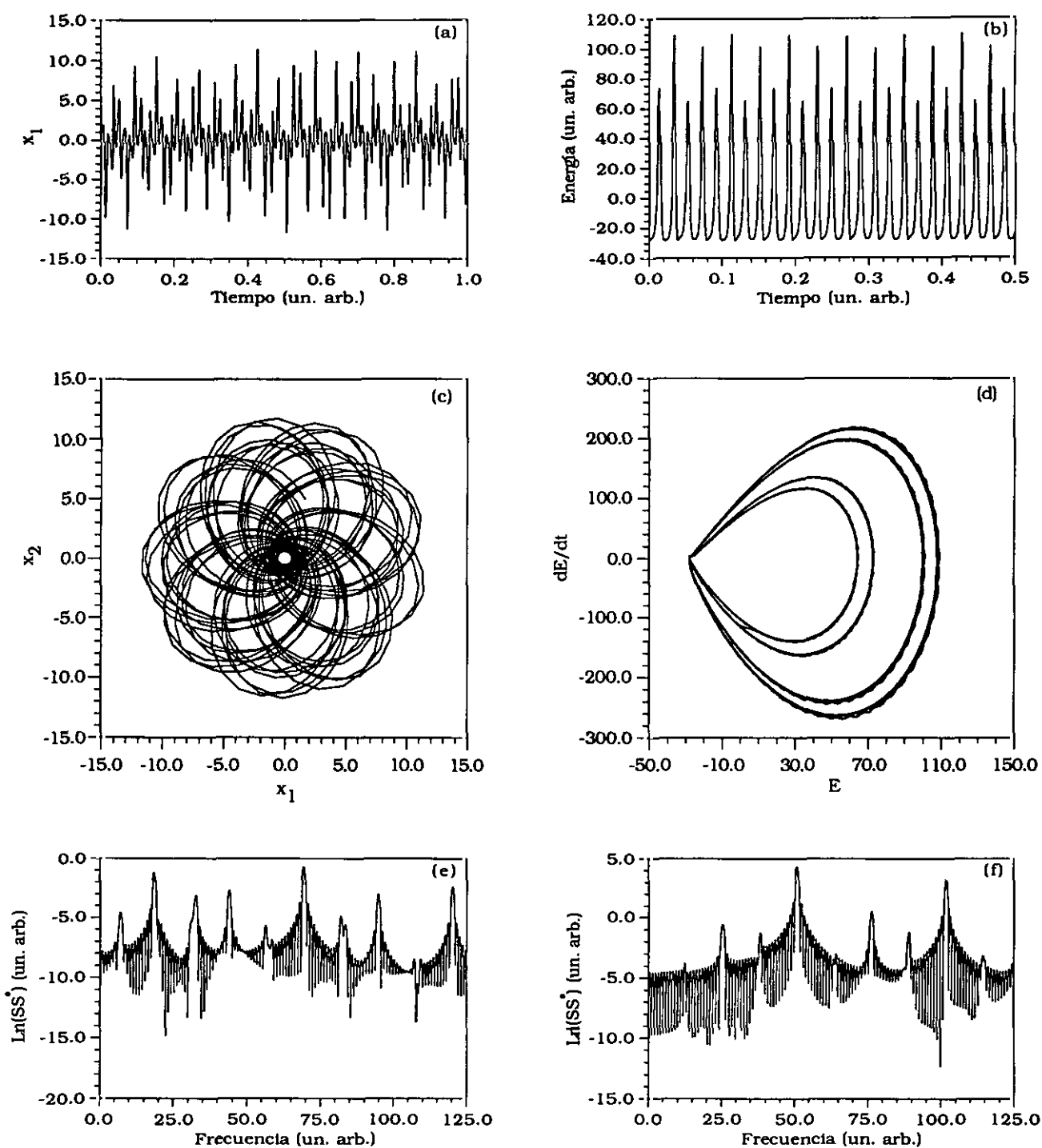
Las ecuaciones del modelo de ondas planas no lineales (4.66)-(4.68) admiten asimismo la simetría de fase discutida anteriormente, solo que con unas relaciones algebraicas entre las amplitudes modales, las frecuencias y los parámetros de control más complicadas que las referidas en la fórmula (4.95). En la referencia [Pas93c] se puede ver la deducción de dichas relaciones algebraicas, así como la demostración de la simetría gauge de las ecuaciones (4.66)-(4.68). En nuestra opinión la existencia de esta simetría continua en una amplia clase de modelos del láser en aproximación semiclásica ayuda a esclarecer la relación mutua entre la dinámica del campo eléctrico y la energía en estos dispositivos, que ha sido objeto de mucha atención recientemente.



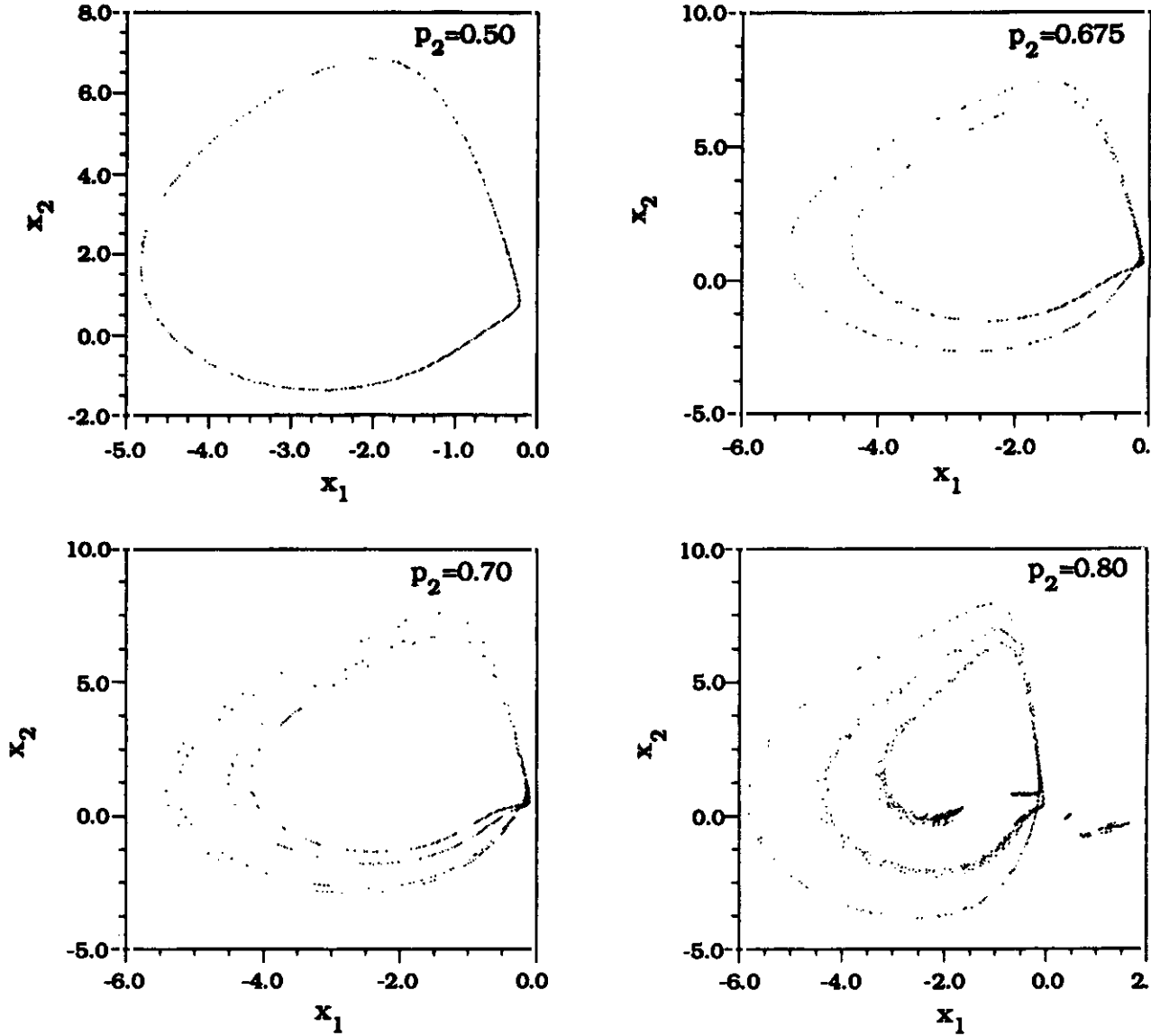
**Figura 4.11.** Evolución temporal del campo eléctrico y la energía (a), (b), sus correspondientes atractores (c), (d) y espectros de Fourier (e), (f) para  $p_2 = 0.50$ .



**Figura 4.12.** Evolución temporal del campo eléctrico y la energía (a), (b), sus correspondientes atractores (c), (d) y espectros de Fourier (e), (f) para  $p_2 = 0.675$ .



**Figura 4.13.** Evolución temporal del campo eléctrico y la energía (a), (b), sus correspondientes atractores (c), (d) y espectros de Fourier (e), (f) para  $p_2 = 0.70$ .



**Figura 4.14.** Secciones de Poincaré de las ecuaciones de Lorenz complejas por el hiperplano  $x_3=0$ ,  $dx_3/dt < 0$  en los casos descritos en el texto. Se observa claramente que el campo eléctrico sufre en cada bifurcación un doblado de toro hasta alcanzar el estado caótico.

#### 4.4. Patrones espaciales de las soluciones en forma de ondas planas y bifurcaciones espacio-temporales

A lo largo de toda esta memoria hemos hecho hincapié en reiteradas ocasiones en los progresos enormes conseguidos en las pasadas dos décadas en el estudio teórico y experimental de los sistemas caóticos deterministas de baja dimensión. Creemos que

es justo decir que hoy en día se tiene una comprensión razonablemente buena de las inestabilidades y bifurcaciones temporales de los sistemas no lineales al variar un parámetro de control. Sin embargo existe un gran número de fenómenos físicos en los que los aspectos *espaciales* son esenciales, y no se puede reducir su caracterización simplemente al aspecto temporal, por mucha riqueza que este último presente. Ejemplos claros pueden ser los sistemas descritos en esta memoria, en los que puntos de la sección transversal del láser próximos o muy próximos entre sí tienen evoluciones temporales *irregulares y descorrelacionadas*. Se ha observado que tal comportamiento se da por toda la sección transversal del láser, con lo que la imagen que resulta es la de una granulación o texturización espacial altamente irregular junto con un comportamiento temporal caótico. A este fenómeno se le ha dado en llamar *turbulencia óptica*, por razones claras a nuestro entender. Los fluidos o los magnetofluidos son otra amplia clase de sistemas donde los aspectos temporales y espaciales de la dinámica se interrelacionan de una manera complicada y fascinante. Tanto es así que hoy en día no poseemos un marco explicativo tan acabado y relativamente claro como con los sistemas caóticos de baja dimensión.

Dentro de este marco general, y ciñéndonos al área de fenómenos que nos ocupa, diremos que se están haciendo progresos notables, tanto de experimentación como de análisis teórico y numérico encaminados a la caracterización de los aspectos espaciales de la dinámica láser.

Las soluciones discutidas en la sección 4.3, al depender no sólo del tiempo sino del tiempo y el espacio a través de la combinación  $s = t - \mathbf{k}\mathbf{x}$ , permiten generar patrones espaciales del campo eléctrico o de la energía de manera prácticamente inmediata. Veamos cómo: supongamos que consideramos "instantáneas", en las cuales  $t = t_0 = \text{cte}$  y que medimos el campo eléctrico o la energía con un detector en forma de matriz, para un cierto conjunto de valores de las variables  $x, y$  en la sección transversal del láser.

Como dentro de la aproximación estudiada todas las magnitudes físicas dependen exclusivamente de  $t - \mathbf{k}\mathbf{x}$  quiere decirse que, una vez elegido  $\mathbf{k}$ , el explorar un conjunto de valores de  $x, y$  (z lo suponemos cero por sencillez) a tiempo constante supone simplemente hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales para valores del parámetro  $s$  comprendidos entre  $s_i = \min_{x,y} (t_0 - \mathbf{k}\mathbf{x})$  y  $s_f = \max_{x,y} (t_0 - \mathbf{k}\mathbf{x})$ .

Debido a que el estado dinámico descrito por las soluciones consideradas es igual para todos los puntos situados en un plano perpendicular a  $\mathbf{k}$ , resulta que los patrones espaciales más interesantes se darán según planos que contengan a dicho vector. En las simulaciones que mostramos a continuación se ha elegido  $\mathbf{k}$  paralelo al eje  $y$ . Las figuras muestran secuencias de patrones espaciales correspondientes a soluciones temporales que van desde periódicas (primer panel) a caóticas (cuarto panel), pasando por soluciones que han doblado su periodo dos veces (paneles

números dos y tres). Los paneles están formados por 32 imágenes parciales. Cada una de ellas representa el patrón transversal de la energía en un instante dado. El tiempo aumenta de izquierda a derecha y de arriba a abajo en todos los paneles.

#### **4.5. Interacción de dominios emisores. Aplicación a la dinámica del láser**

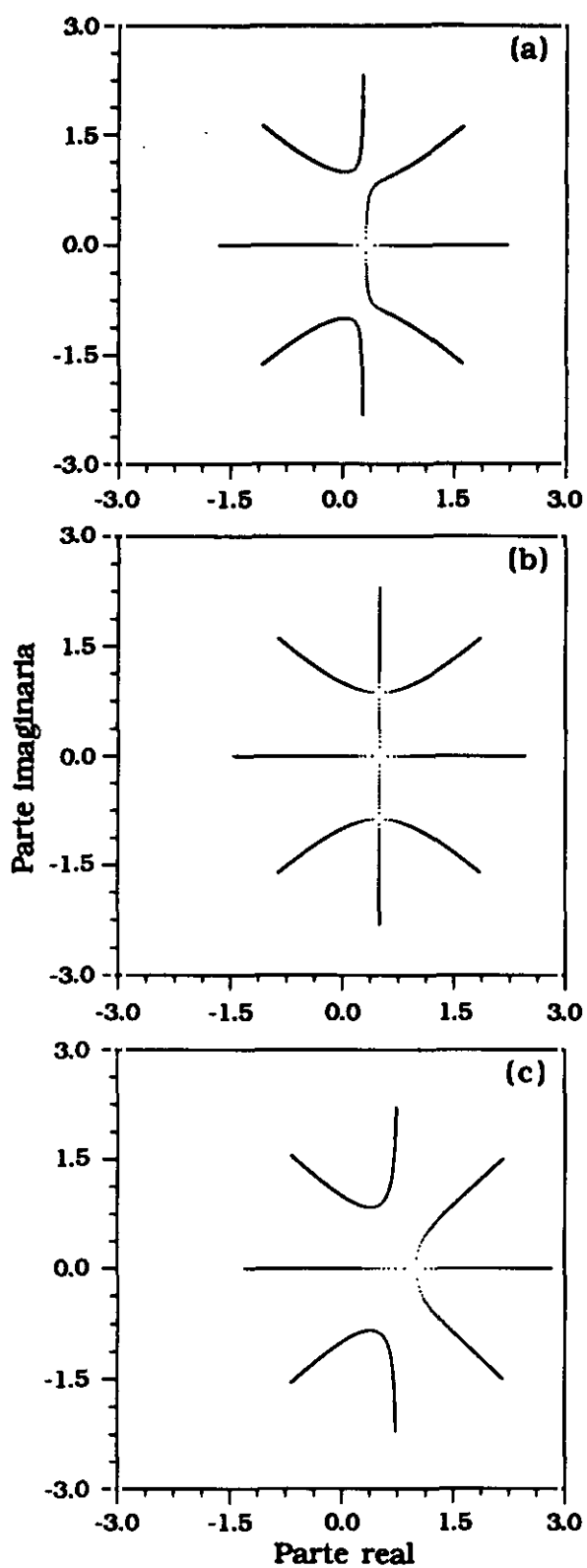
Los resultados experimentales de los capítulos 2 y 3 sugieren que la estructura transversa de los láseres con alto número de Fresnel consiste en multitud de zonas descorrelacionadas espacialmente entre sí, y que oscilan caóticamente. Un programa ambicioso sería explicar estos fenómenos a partir de las ecuaciones de Maxwell-Bloch discutidas en la sección 4.2. En esta memoria no nos hemos planteado dicho problema, pero hemos intentado una primera aproximación al mismo que consiste en lo siguiente. Supongamos establecido el hecho de la existencia de tales dominios o estructuras emisoras independientes en el láser. ¿Qué ocurriría si se diera una interacción entre las mismas que las llevara a acoplarse? ¿Qué efectos dinámicos podríamos esperar?

Partiendo de que la ecuación de van der Pol es uno de los modelos más simples que describe un modo láser autooscilante nos planteamos la cuestión de investigar el comportamiento de dos de tales estructuras acopladas añadiendo parte de la amplitud de uno de los osciladores al otro y viceversa, dando lugar al modelo presentado en el capítulo 1 (Ec. 1.6) [Hak70], [Pas93b]. Aunque algunas de las características del modelo se discutieron en el capítulo 1 (principalmente con objeto de ilustrar las nociones más importantes de la dinámica no lineal) creemos que puede ser interesante pasar revista a otros resultados obtenidos sobre el mismo, y su aplicabilidad a los láseres de los experimentos.

Las ecuaciones 1.6 presentan en general un único punto de equilibrio no degenerado, siendo excepcional el caso en que  $\alpha\beta = 1$ . Cuando es así las ecuaciones del modelo presentan una línea recta cuyos puntos son todos de equilibrio. Esta es una característica que hace distinto el modelo considerado de otros osciladores acoplados [Pas93b].

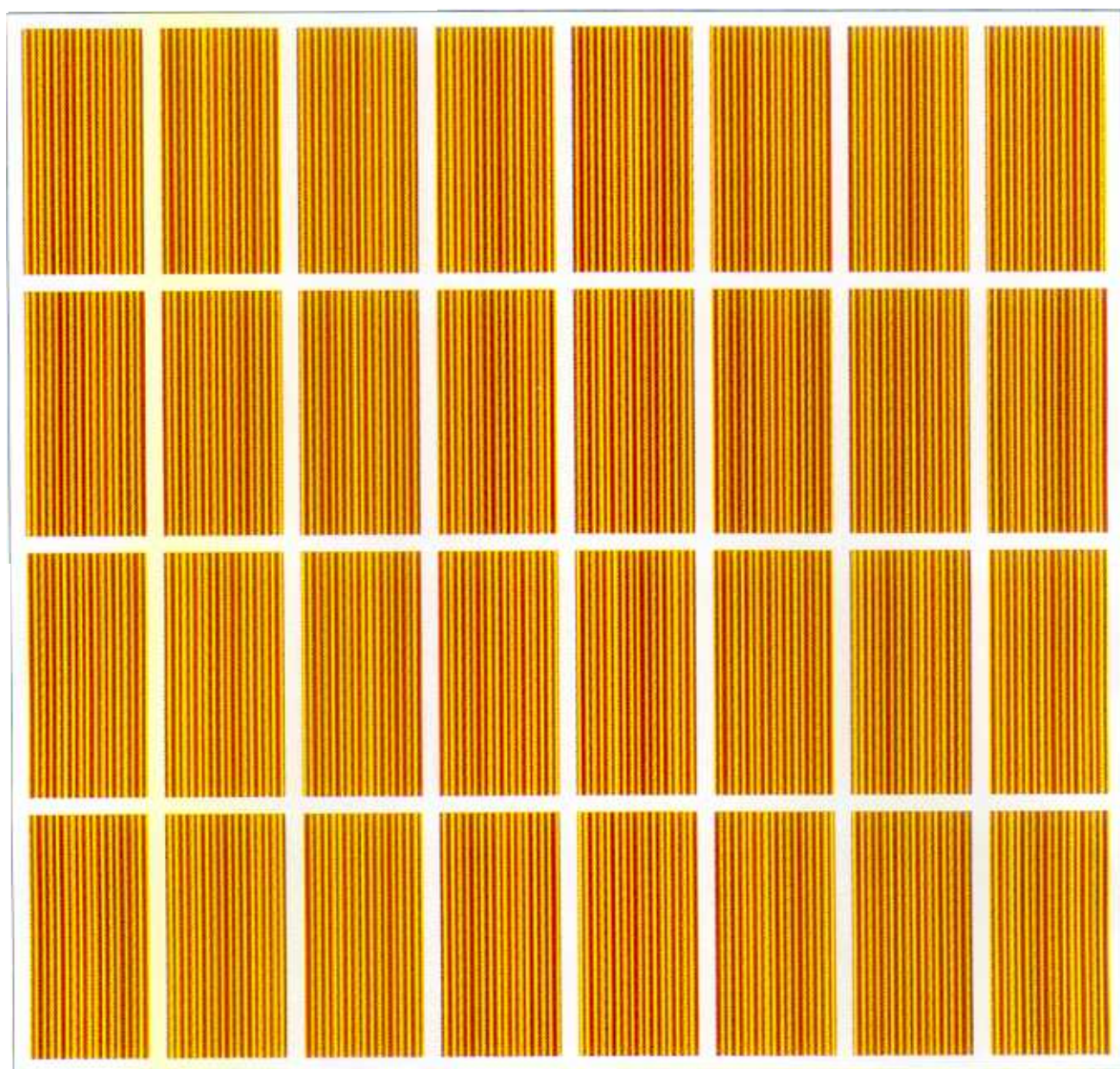
En aproximación lineal el punto de equilibrio resulta ser hiperbólico en general, como lo muestra el movimiento de las raíces del polinomio característico en función del parámetro  $\Delta = 1 - \alpha\beta$  manteniendo los otros dos parámetros de control constantes (figura 4.15).

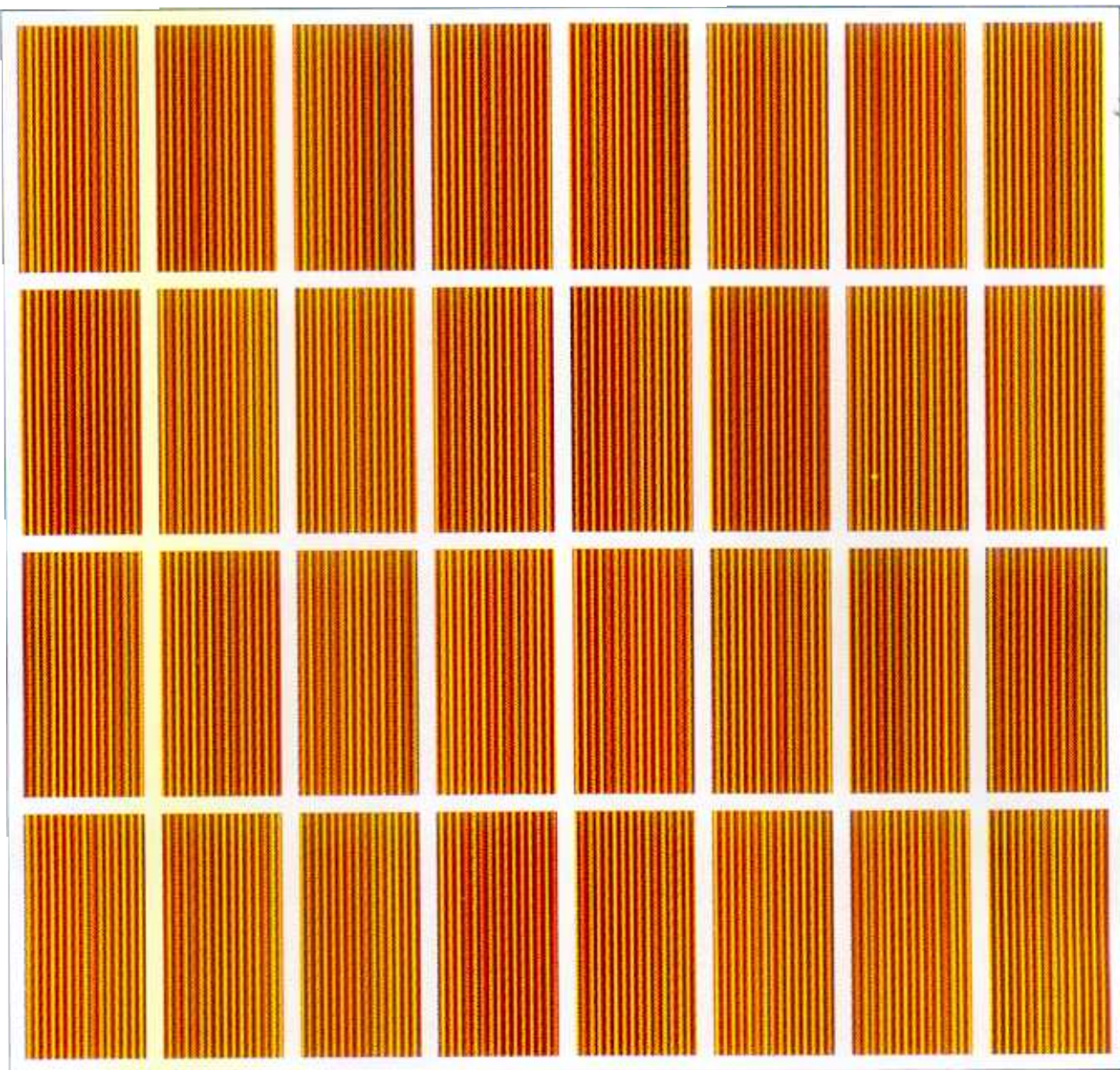
Otra característica interesante que predice este modelo es el bloqueo o sincronización de las oscilaciones para valores específicos de los parámetros del sistema. Este fenómeno consiste en que al acoplarse osciladores de frecuencias dispares pueden dar



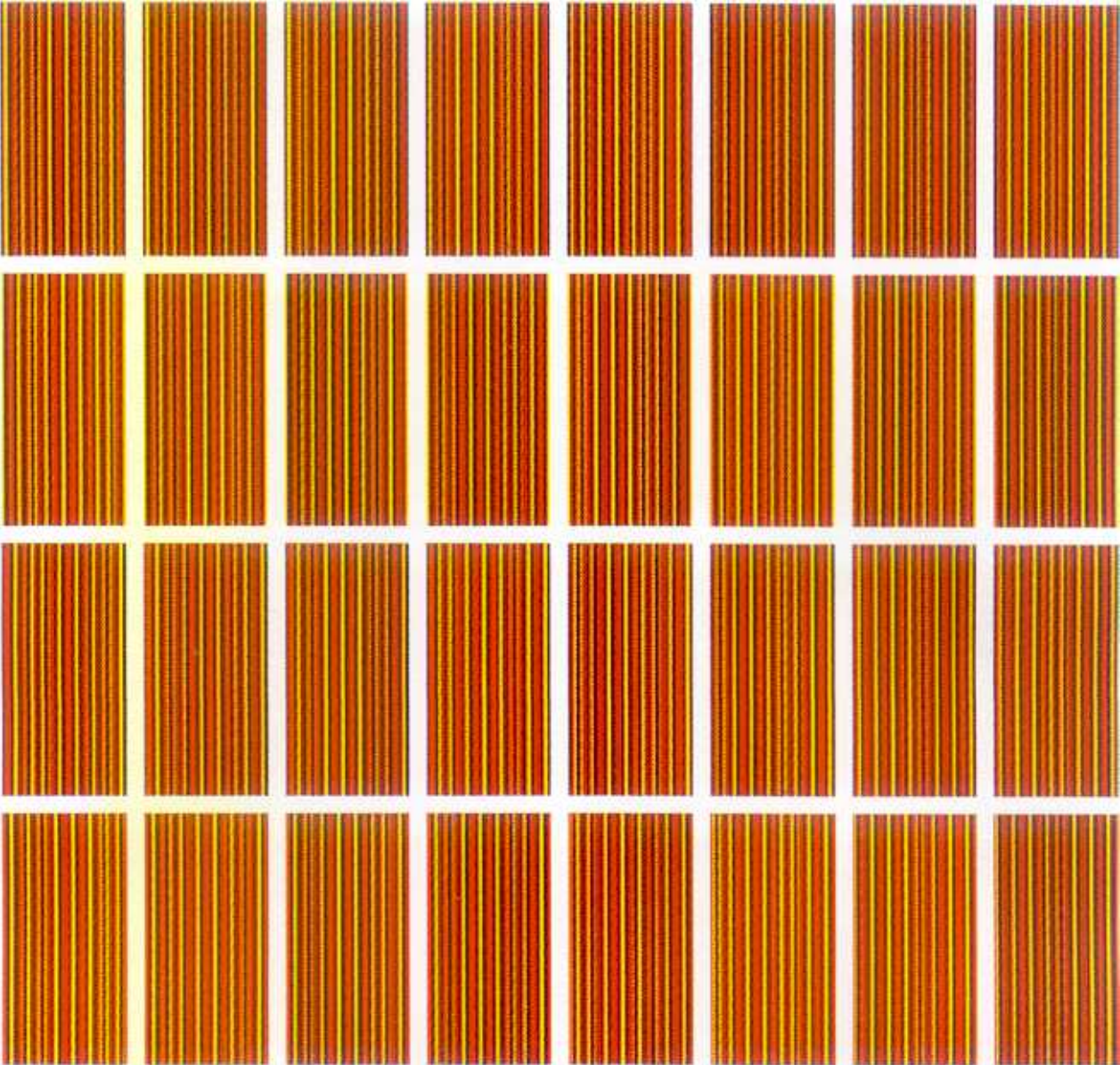
**Figura 4.15.** Movimiento de las raíces del polinomio característico en función de  $\Delta\epsilon[-20.0.20.0]$ . Los casos corresponden a los discutidos en [Pas93b].



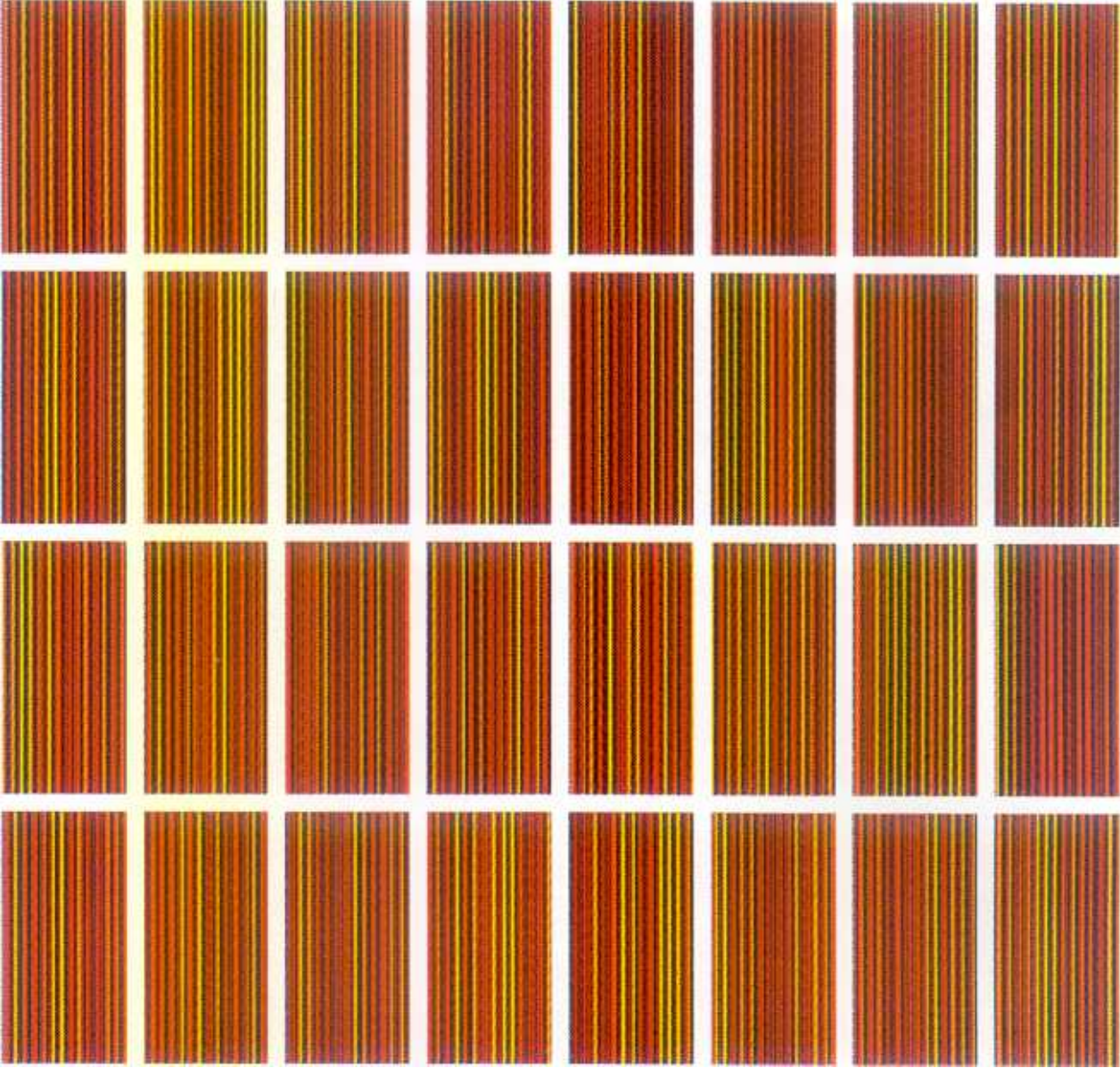








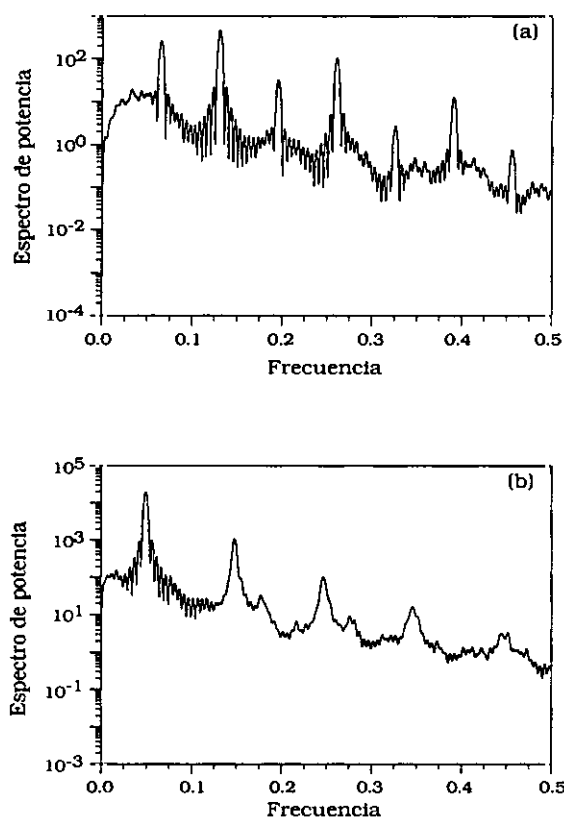
dat vs. ( row, col )



dat vs. ( row, col )

lugar a oscilaciones sincronizadas a una frecuencia fundamental común y distinta a las de los sistemas sin interacción mutua. Este hecho tiene interés en nuestro caso porque podemos utilizarlo para intentar explicar porqué se produce la invariancia que presentan los espectros de Fourier de los experimentos a pesar de cambiar de manera sustancial los parámetros de control del láser. Para ello hemos de ir más allá del simple bloqueo de modos y comprobar que incluso cuando los osciladores entran en el régimen caótico existen picos muy pronunciados en el espectro de Fourier y que las frecuencias de tales picos son relativamente insensibles a la variación de un parámetro del sistema.

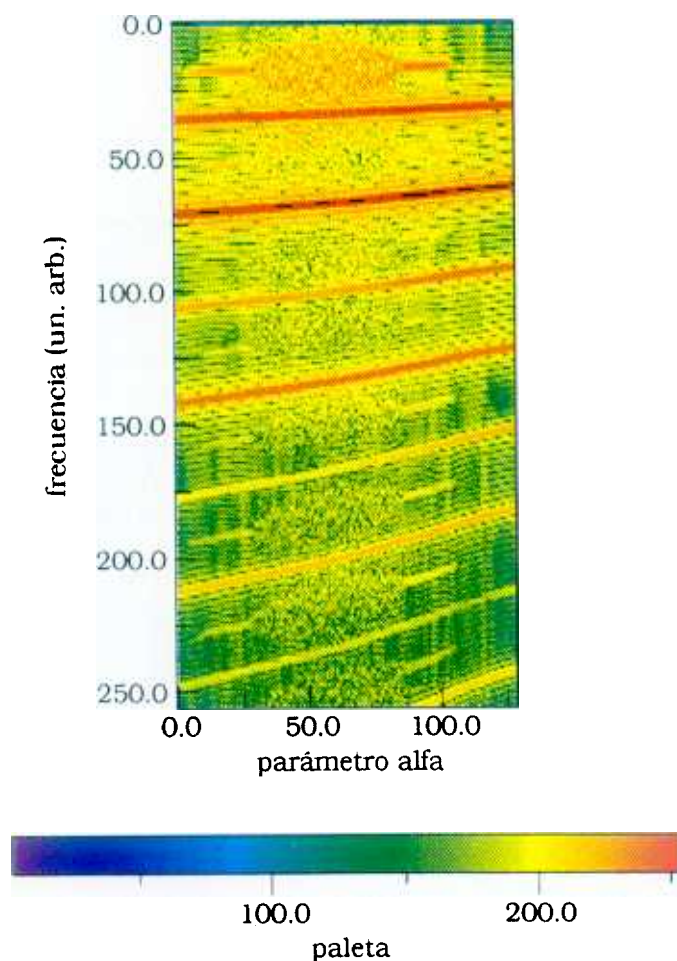
El modelo propuesto cumple bastante bien estos requisitos siempre y cuando se estudien atractores que tengan siempre la misma simetría (Véase [Pas93b] para más detalles sobre este punto). Esto es debido a que los espectros de Fourier de los atractores caóticos simétricos y asimétricos son notablemente distintos, como lo muestra la figura 4.16.



**Figura 4.16.** Espectros correspondientes a atractores caóticos asimétrico (a) y simétrico (b), que aparecen simultáneamente para unos determinados valores de los parámetros de control.



En la figura 4.17 se calcula un espectrograma en el que se ve cómo varía el espectro de las soluciones asintóticas para valores del parámetro  $\alpha$  desde 0.3 hasta 0.7. Se puede apreciar que las frecuencias que más contribuyen al espectro varían muy lentamente al cambiar dicho parámetro, lo que nos lleva a pensar que un modelo más general que el propuesto aquí (pero inspirado por la misma filosofía) puede dar perfecta cuenta de las características de los espectros medidos.



**Figura 4.17.** Espectrograma del modelo de los dos osciladores de van der Pol acoplados. Las componentes de frecuencia más importantes varían muy poco de posición al cambiar el parámetro de control desde 0.3 hasta 0.7.

# CONCLUSIONES

El estudio de láseres de colorantes y CO<sub>2</sub> con alto número de Fresnel ha permitido establecer que en la sección recta de los mismos, puntos muy próximos oscilan de manera caótica y descorrelacionada.

En el caso del láser de colorantes, los parámetros de control que más afectan a la dinámica resultan ser la longitud del resonador, la temperatura de la mezcla activa, el alineamiento, la presencia de diafragmas intracavidad y el nivel de excitación por encima del umbral láser. Los tres primeros afectan de manera notable a la *amplitud* de las fluctuaciones irregulares observadas, pero no a su espectro promedio, que presenta siempre una estructura formada por tres bandas de frecuencia relativamente anchas, centradas en 55, 110 y 165 MHz respectivamente.

La amplitud de las fluctuaciones aumenta linealmente con la longitud del resonador, y por el contrario disminuye con la temperatura según una ley del tipo  $A_{fluct} = \alpha T(^{\circ}C)^{-2}$  en el rango de longitudes y temperaturas explorado.

Las fluctuaciones observadas en pulsos distintos del láser manteniendo los parámetros de control constantes presentan espectros de Fourier anchos y no repetitivos, tanto en lo que respecta al número como a la posición de las componentes espectrales.

Se constata que cuanto mayor es la longitud del resonador y menor es la temperatura mayor es la proporción de señales temporales locales que al aplicarles el algoritmo de Grassberger-Procaccia dan convergencia de pendiente hacia un valor relativamente pequeño (entre 2.7 y 4.0 típicamente). Esto quiere decir que en dichas circunstancias la dinámica se puede aproximar bien por la de un sistema caótico determinista con un número pequeño de grados de libertad. Los espectros anchos y no repetitivos de los que hablábamos antes, y la reconstrucción del atractor subyacente apuntan en este mismo sentido.

Para longitudes del resonador pequeñas y alta temperatura aparece mezclado con las señales caóticas deterministas un ruido aleatorio que destruye muy eficientemente la coherencia implícita en las primeras, de modo que la proporción de señales para las que el algoritmo de Grassberger-Procaccia converge disminuye sustancialmente.

El estudio de la amplitud de las fluctuaciones irregulares al ir integrando zonas cada vez mayores de la sección recta del haz con un diafragma externo ha permitido establecer un límite superior a la longitud de coherencia transversa de tales fluctuaciones. En el láser de colorantes resulta ser menor o igual a 200  $\mu\text{m}$ . Teniendo en cuenta las dimensiones de la sección recta del haz esto implica que existen al menos mil dominios cuya interacción mutua da cuenta del estado de intenso caos espacio-temporal observado.

La introducción en la cavidad láser de diafragmas de diámetro variable modifica de forma sustancial la dinámica del mismo, especialmente cuando se alcanzan números de Fresnel del orden de la unidad. En este caso se observa que un aumento del bombeo conduce de un estado sin fluctuaciones a otro de oscilaciones muy pronunciadas y de periodo relativamente largo; aumentando aún más el bombeo aparecen fluctuaciones rápidas y muy ordenadas. Las evidencias experimentales acumuladas hasta el momento implican que para bombeos todavía mayores y/o mayor diámetro del diafragma son posibles nuevas bifurcaciones que llevan al láser a un estado espacialmente descorrelacionado y temporalmente caótico. El estudio detallado de estas bifurcaciones, apenas iniciado en la presente memoria, permitirá sin duda comprender el estado turbulento observado para números de Fresnel altos.

En funcionamiento libre (esto es, en ausencia de elementos selectores intracavidad) el láser de  $\text{CO}_2$  presenta fluctuaciones irregulares no amortiguadas de la intensidad luminosa, de gran amplitud (cercana al 100% en algunos casos), y cuya correlación espacial, medida de dos formas independientes, es pequeña ( $\approx 3\text{mm}$ ) en comparación con las dimensiones de la sección recta. Para medir la correlación espacial se ha medido en tiempo real la evolución de dos puntos próximos de la sección recta del haz, y también se ha realizado un experimento de correlación de intensidad usando un único detector al que llegaba radiación de dos puntos cuya separación se podía variar.

El pulso del láser de  $\text{CO}_2$  presenta dos zonas bien diferenciadas y que conviene discutir por separado. Se trata del pico de conmutación de ganancia (PCG) y de la cola de transferencia colisional (CTC). El PCG tiene una duración aproximada de 100 ns, y es la zona en la que básicamente se crea el patrón espacial del láser. Nuestros estudios en tiempo real han permitido observar (de forma indirecta) la formación de las estructuras transversales del campo, mediante la introducción de diafragmas intracavidad. En concreto, en el PCG se observan nuevas estructuras transversales además del modo  $\text{TEM}_{00}$  sólo cuando el diámetro del diafragma es mayor o igual a 14 mm, mientras que en la CTC se observan frecuencias de batido correspondientes a



nuevas estructuras espaciales de campo para un diámetro de 10 mm. Hasta donde nosotros sabemos esta es una de las primeras constataciones experimentales de la formación a lo largo del tiempo de estructuras de campo en un láser pulsado.

La dinámica en la CTC se aproxima mucho más a las condiciones cuasiestacionarias que son las óptimas para la discusión de los fenómenos de caos temporal. En esa zona del pulso láser, y en funcionamiento libre, se ha podido demostrar mediante la aplicación del algoritmo de Grassberger-Procaccia y la reconstrucción del atractor que la dinámica corresponde a un sistema caótico determinista con dimensión de correlación  $\approx 2.7$ . Esto implica que, a lo sumo, un sistema de siete ecuaciones diferenciales basta para describir la dinámica temporal. Estamos de nuevo ante un caso de caos espaciotemporal generalizado (turbulencia óptica).

Al integrar toda la sección recta del haz del láser de  $\text{CO}_2$  en el detector de radiación se observa que las fluctuaciones irregulares desaparecen, y son sustituidas por una oscilación regular, ordenada y muy rápida que corresponde al batido de los modos axiales. Dicho batido axial se ha identificado debido a que la separación en frecuencias en dichas señales viene dada por  $c/2L$ . En nuestros experimentos se ha cambiado la longitud del resonador para comprobar de manera explícita que la relación anterior se verificaba para otros valores de la misma. Este comportamiento se da tanto en el PCG como en la cola de transferencia colisional.

Las fluctuaciones irregulares locales en cambio muestran espectros promediados que son insensibles a cambios notables de los parámetros de control. En concreto, no se ven afectados por cambios en la longitud del resonador, concentración de la mezcla de gases, o cambios en la reflectividad del espejo de salida. Podemos decir que la dinámica irregular local es *robusta* frente a cambios importantes de los parámetros del láser. Los espectros promedio de las fluctuaciones son anchos, y se extienden al menos hasta los 500 MHz.

Los espectros correspondientes a pulsos distintos pero manteniendo los parámetros de control fijos son en general distintos. Sin embargo, cuando el láser oscila por ejemplo en el modo fundamental  $\text{TEM}_{00}$  los espectros difieren únicamente en las amplitudes relativas de las distintas componentes de frecuencia, mientras que en el caso de las fluctuaciones irregulares los espectros cambian en el número y posición de dichas componentes.

La introducción de diafragmas intracavidad en el láser de  $\text{CO}_2$  ha permitido establecer que la dinámica espacio-temporal local surge por la interacción no lineal

de estructuras transversas. La visión que mejor se ajusta a todos los hechos observados es la de familias de modos axiales acoplados en fase (lo que explica el batido de modos global) correspondientes a estructuras transversas que interaccionan no linealmente entre sí.

De todo lo anterior se desprende que existe un notable paralelismo entre la dinámica local caótica del láser de colorantes y la del de  $\text{CO}_2$ . Esto sugiere que el fenómeno de caos espaciotemporal generalizado descrito y estudiado en esta memoria ha de ser muy general, y aplicable a muchos otros tipos de láseres.

En esta memoria hemos introducido dos modelos teóricos que intentan explicar algunas características básicas de los experimentos. Sin embargo una explicación detallada del estado de turbulencia óptica está aún fuera del alcance del presente trabajo.

Uno de los modelos parte de las ecuaciones semiclásicas en derivadas parciales de Maxwell-Bloch y estudia una rama de soluciones exactas de las mismas, en forma de ondas planas no lineales. El modelo consta de siete ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya dinámica se ha estudiado en profundidad. Se han establecido las rutas al caos seguidas por el campo eléctrico y la polarización por un lado y la energía y la inversión de población por otro. Mientras que las primeras siguen una vía al caos por doblado de toro, las segundas siguen la vía del doblado de periodo. Se han encontrado soluciones formales que muestran de manera explícita que las rutas al caos del campo y la energía han de ser distintas, y que esto ha de verificarse no sólo para nuestro modelo en particular, sino para una clase muy amplia de ecuaciones del láser siempre que respeten la estructura matemática básica de las ecuaciones de Maxwell-Bloch de partida.

Las ecuaciones en forma de ondas planas no lineales admiten un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías que ayuda a explicar las distintas vías al caos del campo y la energía, y sobre todo, permite la conexión con el tratamiento habitual que se hace en la literatura del problema de la relación campo-energía.

Debido a su dependencia tanto de las coordenadas espaciales como del tiempo, las ecuaciones en forma de ondas planas se pueden aplicar también al cálculo de patrones espaciales, y al estudio de sus correspondientes bifurcaciones. Dichos cálculos se presentan en esta memoria y se comparan con los patrones espaciales observados en el láser de  $\text{CO}_2$ . Se han establecido las condiciones en las que las soluciones en forma de ondas planas no lineales son una buena aproximación a la dinámica del láser.

Se ha estudiado la ruta al caos del campo y la energía en las ecuaciones de Lorenz complejas, que son el modelo más simple de láser monomodo homogéneamente ensanchado. De nuevo se demuestra que la vía al caos del campo es mediante el doblado de toro, mientras que la energía sigue la vía del doblado de periodo. Se han establecido los cambios en el espectro de Fourier en cada nueva bifurcación del campo eléctrico, y se ha comprobado su carácter general al estudiar muchas otras combinaciones de parámetros de control. Las ecuaciones de Lorenz complejas también son invariantes bajo un grupo de Lie uniparamétrico, y se han establecido relaciones algebraicas entre las frecuencias que aparecen en el espectro, las amplitudes de las variables dinámicas y los parámetros de control.

Los experimentos sugieren que la estructura transversal del haz del láser se puede comprender como un conjunto de dominios oscilantes acoplados entre sí. En esta memoria se ha planteado un primer modelo en esta dirección que considera el acoplo de dos osciladores de tipo van der Pol. Dicho sistema posee una interesante dinámica no lineal, que va desde el acoplo o bloqueo de frecuencias hasta la existencia de simetrías discretas, presencia simultánea de varios atractores en el espacio de fases, cuencas de atracción fractales, caos temporal, etc. Quizá lo más interesante desde el punto de vista de la aplicación del modelo a los experimentos sea que el espectro promedio de las fluctuaciones varía relativamente poco al cambiar un parámetro de control en más de un 100%. Este fenómeno puede servir de guía para explicar la invariancia de los espectros de potencia de las fluctuaciones irregulares, siempre y cuando se generalice el modelo a un número suficientemente grande de osciladores acoplados.

# BIBLIOGRAFIA

- [Abr85 ] **Overview of instabilities in laser systems.** N.B. Abraham, L.A. Lugiato, and L.M. Narducci. J. Opt. Soc. Am. B, Vol.2, No.1, 7 (1985).
- [Abr88 ] **Dynamical Instabilities and Pulsations in Lasers.** N.B. Abraham, P. Mandel, and L.M. Narducci in *Progress in Optics*, Volume XXV, North Holland 1988.
- [Ack85 ] **Chaos in Quantum Optics.** J.R. Ackerhalt and M.-L. Shih. Physics Reports 128, Nos 4-5, 205-300 (1985).
- [Alv86a ] **Kinematics of emission of individual modes by a multimode cw dye laser and its influence on the sensitivity of intracavity laser spectroscopy.** Yu.M. Alvazyan, V.M. Baev, T.P. Belikova, S.A. Kovalenko, E.A. Sviridenkov, and O.I. Yushchuk. Sov. J. Quantum Electron. , Vol.16, No.3, 397 (1986).
- [Alv86b ] **Spontaneous oscillations of the emission spectrum of a multimode wide-band laser.** Yu.M. Alvazyan, V.M. Baev, A.A. Kochanov, and S.A. Kovalenko. Sov. J. Quantum Electron. , Vol.16, No.8, 1133 (1986).
- [Alv87 ] **Kinetics of emission spectra of multimode lasers and its influence on the sensitivity of intracavity laser spectroscopy.** Yu.M. Alvazyan, V.M. Baev, V.V. Ivanov, S.A. Kovalenko, and E.A. Sviridenkov. Sov. J. Quantum Electron. , Vol.17, No.2, 168 (1987).
- [Alb85 ] **Low-dimensional chaotic attractors for an unstable, inhomogeneously broadened, single-mode laser.** A.M. Albano, J. Abounady, T.H. Chyba, C.E. Searle, S. Yong, R.S. Gioggia, and N.B. Abraham. J. Opt. Soc. Am. B, Vol.2, No.1, 47 (1985).
- [Are82 ] **Experimental Evidence of Subharmonic Bifurcations, Multistability, and Turbulence in a Q-switched Gas Laser.** F.T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni, and J. Tredicce. Phys. Rev. Lett. , Vol.49, No.17, 1217 (1982).
- [Are86 ] **Generation of chaotic dynamics by feedback on a laser.** F.T. Arecchi, W. Gadomski, and R. Meucci. Phys. Rev. A, Vol.34, No.2, 1617 (1986).
- [Are87 ] **Laser Dynamics with Competing Instabilities.** F.T. Arecchi, R. Meucci, and W. Gadomski. Phys. Rev. Lett. , Vol.58, No.21, 2205 (1987).
- [Are88 ] **Laser with feedback: an optical implementation of competing instabilities, Shil'nikov chaos, and transient fluctuation enhancement.** F.T. Arecchi, W. Gadomski, A. Lapucci, H. Mancini, R. Meucci, and J.A. Roversi. J. Opt. Soc. Am. B, Vol.5, No.5, 1153 (1988).

- [Are90 ] **Experimental Evidence of Chaotic Itinerary and Spatiotemporal Chaos in Optics.** F.T. Arecchi, G. Giacomelli, P.L. Ramazza, and S. Residori. Phys. Rev. Lett. , Vol.65, No.20, 2531 (1990).
- [Are91 ] **Vortices and Defect Statistics in Two-Dimensional Optical Chaos.** F.T. Arecchi, G. Giacomelli, P.L. Ramazza, and S. Residori. Phys. Rev. Lett. , Vol.67, No.27, 3749 (1991).
- [Are92b ] **Periodic and Chaotic Alternation in Systems with Imperfect  $O(2)$  Symmetry.** F.T. Arecchi, S. Boccaletti, G.B. Mindlin, and C. Perez Garcia. Phys. Rev. Lett. , Vol.69, No.26, 3723 (1992).
- [Atm85 ] **Dynamics of laser intracavity absorption.** H. Atmanspacher, H. Scheingraber, and C.R. Vidal. Phys. Rev. A, Vol.32, No.1, 254 (1985).
- [Atm86 ] **Deterministic chaos and dynamical instabilities in a multimode cw dye laser.** H. Atmanspacher and H. Scheingraber. Phys. Rev. A, Vol.34, No.1, 253 (1986).
- [Atm87 ] **Stimulated Brillouin scattering and dynamical instabilities in a multimode cw dye laser.** H. Atmanspacher, H. Scheingraber, and V.M. Baev. Phys. Rev. A, Vol.35, No.1, 142 (1987).
- [Bae78 ] **Intracavity laser spectroscopy with continuous and quasicontinuously operating lasers.** V.M. Baev, T.P. Belikova, E.A. Sviridenkov, and A.F. Suchkov. Sov. Phys. JEPT, Vol.47, No.1, 21 (1978).
- [Bae80a ] **Transient processes manifested in the emission spectra of cw wide-band dye lasers used for intracavity laser spectroscopy.** V.M. Baev, T.P. Belikova, S.A. Kovalenko, E.A. Sviridenkov, and A.F. Suchkov. Sov. J. Quantum Electron. , Vol.10, No.4, 517 (1980).
- [Bae80b ] **Multichannel recording of absorption spectra obtained by intracavity laser spectroscopy.** V.M. Baev, S.A. Kovalenko, E. A. Sviridenkov, A.F. Suchkov, and D.D. Topygin. Sov. J. Quantum Electron. , Vol.10, No.5, 638 (1980).
- [Bae81 ] **Quantum fluctuations of a multimode laser oscillator.** V.M. Baev, G. Gaida, H. Schröder, and P.E. Toschek. Optics Communications, Vol.38, No.4, 309 (1981).
- [Ber88 ] **L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence.** P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal. Ed. Hermann, Paris 1988.
- [Bis85a ] **Observation of optical turbulence in a single mode homogeneously broadened optically pumped molecular laser.** D.J. Biswas and R.G. Harrison. Optics Communications, Vol.54, No.2, 112 (1985).
- [Bis85b ] **Evidence of mode splitting in a single mode, homogeneously broadened Raman laser.** Dhruba J. Biswas and Robert G. Harrison. Appl. Phys. Lett. , Vol.47, No.3, 198 (1985).

- [Bis85c ] **Experimental evidence of three mode quasiperiodicity and chaos in a single longitudinal, multi-transverse-mode cw CO<sub>2</sub> laser.** Dhruba J. Biswas and Robert G. Harrison. Phys. Rev. A, Vol.32, No.6, 3835 (1985).
- [Bis87 ] **Experimental observation of oscillatory instabilities and chaos in a gain modulated single mode cw CO<sub>2</sub> laser.** Dhruba J. Biswas, Vas Dev, and U.K. Chatterjee. Phys. Rev. A, Vol.35, No.1, 456 (1987).
- [Bis88 ] **Experimental observation of instabilities and chaos in the secondary-beat of a multiple-transverse-mode CO<sub>2</sub> laser.** Dhruba J. Biswas, Vas Dev, and U.K. Chatterjee. Phys. Rev. A, Vol.38, No.1, 555 (1988).
- [Bon89 ] **Bifurcation and chaos in a system of optically coupled CO<sub>2</sub> lasers.** A.V. Bondarenko, A.F. Glova, S.N. Kozlov, F.V. Lebedev, V.V. Likhanskii, A.P. Napartovich, V.D. Pis'menniy, and V.P. Yartsev. Sov. Phys. JEPT 68 (3), 461, (1989).
- [Bra91a ] **Transverse laser patterns. I. Phase singularity crystals.** M. Brambilla, F. Battipede, L.A. Lugliato, V. Penna, F. Prati, C. Tamm, and C.O. Weiss. Phys. Rev. A, Vol.43, No.9, 5090 (1991).
- [Bra91b ] **Transverse laser patterns. II. Variational principle for pattern selection, spatial multistability, and laser hydrodynamics.** M. Brambilla, F. Battipede, L.A. Lugliato, V. Penna, F. Prati, C. Tamm, and C.O. Weiss. Phys. Rev. A, Vol.43, No.9, 5114 (1991).
- [Cas80 ] **Stability criteria for high-intensity lasers.** Lee W. Casperson. Phys. Rev. A, Vol.21, No.3, 911 (1980).
- [Cas81 ] **Stability criteria for non-Doppler lasers.** Lee W. Casperson. Phys. Rev. A, Vol.23, No.1, 248 (1981).
- [Cas88a ] **Spontaneous coherent pulsations in standing-wave laser oscillators.** Lee W. Casperson. J. Opt. Soc. Am. B, Vol.5, No.5, 958 (1988).
- [Cas88b ] **Spontaneous coherent pulsations in standing-wave oscillators: frequency characteristics.** J. Opt. Soc. Am. B, Vol.5, No.5, 970 (1988).
- [Chy88 ] **Period doubling and chaos in a spin-1 model of the free-running ruby nuclear magnetic resonance laser.** David E. Chyba. J. Opt. Soc. Am. B, Vol.5, No.5, 916 (1988).
- [Cro93 ] **Pattern formation outside of equilibrium.** M.C. Cross and P.C. Hohenberg. Reviews of Modern Physics, Volume 65, number 3 Part II, July 1993.
- [Dan87 ] **Chaos in a CO<sub>2</sub> laser with modulated parameters: Experiments and numerical simulations.** Didier Dangoisse, Pierre Glorieux, and Daniel Hannequin. Phys. Rev. A, Vol.36, No.10, 4775 (1987).
- [Dan92 ] **Two-dimensional optical lattices in a CO<sub>2</sub> laser.** D. Dangoisse, D. Hannequin, C. Lepers, E. Louvergneaux, and P. Glorieux. Phys. Rev. A, Vol.46, No.9, 5955 (1992).

- [DÁn92] | **Spatiotemporal Dynamics of Lasers in the Presence of an Imperfect  $O(2)$  Symmetry.** E.J. D'Ángelo, E. Izaguirre, G.B. Mindlin, G. Huyet, L. Gil, and J.R. Tredicce. Phys. Rev. Lett. , Vol.68, No.25, 3702 (1992).
- [Dev86] | **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.** Robert L. Devaney. Benjamin-Cummings, 1986.
- [Eck85] | **Ergodic theory of chaos and strange attractors.** J.-P. Eckmann and D. Ruelle. Reviews of Modern Physics, Vol. 57, No. 3, Part I, July 1985.
- [Eke92] | **Al azar.** Ivar Ekeland. Editorial Gedisa, 1992.
- [Elg87] | **Traveling -wave solutions of the Maxwell-Bloch equations.** J.N. Elgin and J.B. Molina Garza. Phys. Rev. A, Vol.35, No.9, 3986 (1987).
- [Eme86] | **Formation of inversion filaments in laser media due to interatomic interactions via the superradiation field.** V.I. Emelyanov and V.I. Yukalov. Opt. Spectrosc. (USSR) 60, 3, p. 385 (1986).
- [Fu 90] | **Self-pulsing in a band model for dye lasers.** Hong Fu and H. Haken. Phys. Rev. A, Vol.42, No.7, 4151 (1990).
- [Gle88] | **Caos.** James Gleick. Editorial Seix-Barral, 1988.
- [Gra83a] | **Characterization of Strange Attractors.** P. Grassberger and I. Procaccia. Phys. Rev. Lett. vol. 50, No. 5, 346 (1983).
- [Gra83b] | **Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal.** P. Grassberger, and I. Procaccia. Phys. Rev. A, vol. 28, No. 4, 2591 (1983).
- [Gre90] | **Spontaneous Symmetry Breaking in a Laser: The Experimental Side.** C. Green, G.B. Mindlin, E.J. D'Ángelo, H.G. Solari, and J.R. Tredicce. Phys. Rev. Lett. , Vol.65, No.25, 3124 (1990).
- [Guc83] | **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields.** J. Guckenheimer, P. Holmes. Applied Math. Sciences No. 42. Springer Verlag 1983.
- [Gue91] | **Order-Disorder Transition in the Local Dynamics of a TEA  $CO_2$  Laser.** J. M. Guerra, F. Encinas, and I. Pastor. Springer Proceedings in Physics, Vol.55, pág. 250. Springer-Verlag 1991.
- [Hak70] | **Licht und Materie I.** Handbuch der Physik XXV/2c (1970), Springer-Verlag.
- [Hak85] | **Light vol.2. Laser light dynamics.** North-Holland (1985).
- [Har85a] | **Experimental evidence of self-pulsing and chaos in an optically pumped  $12 \mu m$   $NH_3$  laser.** R.G. Harrison and I.A. Al-Saidi. Optics Communications, Vol.54, No.2, 107 (1985).
- [Har85b] | **Demonstration of Self-Pulsing Instability and Transitions to Chaos in Single -Mode and Multimode Homogeneously Broadened Raman Laser.** R.G. Harrison and D.J. Biswas. Phys. Rev. Lett. , Vol.55, No.1, 63 (1985).

- [Har85c ] **Observation of Instabilities and Chaos in a Homogeneously Broadened Single Mode and Multimode Midinfrared Raman Laser.** R.G. Harrison, I.A. Al-Saidi, and D.J. Biswas. IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol.QE-21, No.9, 1491 (1985).
- [Hil84 ] **Observation of Higher Order Dynamical States of a Homogeneously Broadened Laser.** Lloyd W. Hillman, Jerzy Krasinski, Robert W. Boyd, and C.R. Stroud Jr. Phys. Rev. Lett. , Vol.52, No.18, 1605 (1984).
- [Hil85 ] **Dynamics of homogeneously broadened lasers: higher-order bichromatic states of operation.** Lloyd W. Hillman, Jerzy Krasinski, Karl Koch, and C.R. Stroud; Jr. J. Opt. Soc. Am. B, Vol.2, No.1, 211 (1985).
- [Hüb89 ] **Dimensions and entropies of chaotic intensity pulsations in a single-mode far-infrared NH<sub>3</sub> laser.** U Hübner, N.B. Abraham, and C.O. Weiss. Phys. Rev. A, Vol.40, No.11, 6354 (1989).
- [Ipa88 ] **Near field local intensity fluctuations in a flash lamp pumped dye laser. I.** Iparraguirre, and J.M. Guerra. Optics Communications 67 (1988) 293-296.
- [Jak92 ] **Space-time dynamics of wide-gain section lasers.** P.K. Jakobsen, J.V. Moloney, A.C. Newell, and R. Indik. Phys. Rev. A, Vol.45, No.11, 8129 (1992).
- [Kha84 ] **Autostochastic operation of a solid-state ring laser with low-frequency periodic loss modulation.** P.A. Khandokin and Ya.I. Khanin. Sov. J. Quantum Electron. , Vol.14, No.7, 1004 (1984).
- [Kli84 ] **Chaos in a solid state laser with a periodically modulated pump.** W. Klische, H.R. Telle, and C.O. Weiss. Optics Letters, Vol.9, 561 (1984).
- [Kli85 ] **Instabilities and routes to chaos in a homogeneously broadened one- and two-mode ring laser.** W. Klische and C.O. Weiss. Phys. Rev. A, Vol.31, No.6, 4049 (1985).
- [Kli89 ] **Spatiotemporal chaos from a continuous Na<sub>2</sub> laser.** W. Klische, C.O. Weiss, and B. Welleghausen. Phys. Rev. A, Vol.39, No.2, 919 (1989).
- [Lag88 ] **Instabilities in Doppler broadened optically pumped far infrared lasers.** F. Laguarda, J. Pujol, R. Vilaseca, and R. Corbalán. Journal de Physique, Colloque C2, Supplément au n° 6, Tome 49, C2-409 (1988).
- [Lan89 ] **Mécanique des fluides.** L. Landau et E. Lifchitz, deuxième édition revue et complétée. Editions Mir, Moscou 1989.
- [Lef89 ] **Phase dynamics of transverse diffraction patterns in the laser.** R. Lefever, L.A. Lugliato, Wang Kaige, N.B. Abraham, and Paul Mandel. Physics Letters A, Vol.135, No.4-5, 254 (1989).



- [Lip87] | **Evidence that transverse effects cause an instability in a single-mode CO<sub>2</sub> laser.** G.L. Lippl, N.B. Abraham, G.P. Puccioni, F.T. Arecchi, and J.R. Tredicce. Phys. Rev. A, Vol.35, No.9, 3978 (1987).
- [Lor63] | **Deterministic nonperiodic flow.** E. Lorez. J. Atmos. Sci. 20, 130 (1963).
- [Lu 91] | **Nonlinear dynamics of Raman lasers.** Weiping Lu and Robert G. Harrison. Phys. Rev. A, Vol.43, No. ,6358 (1991).
- [Lug85] | **Multimode instabilities in a homogeneously broadened ring laser.** L.A. Lugiato, L.M. Narducci, E.V. Eschenazi, D.K. Bandy, and N.B. Abraham. Phys. Rev. A, Vol.32, No.3, 1563 (1985).
- [Lug88a] | **Cooperative frequency locking and stationary spatial structures in lasers.** L.A. Lugiato, C. Oldano, and L.M. Narducci. J. Opt. Soc. Am. B, Vol.5, No.5, 879 (1988).
- [Lug88b] | **Role of transverse effects in laser instabilities.** L.A. Lugiato, F. Prati, L.M. Narducci, P. Ru, J.R. Tredicce, and D.K. Bandy. Phys. Rev. A, Vol.37, No.10, 3847 (1988).
- [L'vo91] | **Scale invariant theory of fully developed hydrodynamic turbulence-Hamiltonian approach.** V.S. L'vov. Physics Reports (Review Section of Physics Letters) 207, No. 1, pp. 1-47 (1991).
- [Mac89] | **Subharmonic bifurcation and chaos in a periodically modulated Co:MgF<sub>2</sub> laser.** A.C. Maciel, P. Maly, and J.F. Ryan. Phys. Rev. A, Vol.39, No.10, 5455 (1989).
- [Mae82] | **Measurements of mode-splitting self-pulsing in a single-mode, Fabry-Perot laser.** M. Maeda and N.B. Abraham. Phys. Rev. A, Vol.26, No.6, 3395 (1982).
- [Mat84] | **Multistability and autostochasticity in a laser with a delayed-response active medium subjected to periodic loss modulation.** I.I. Matorin, A.S. Pikovskii, and Ya.I. Khanin. Sov. J. Quantum Electron. , Vol.14, No.10, 1401 (1984).
- [McM88] | **Instabilities and chaos in a multimode, standing-wave, cw dye laser.** I. McMackin, C. Radzewicz, M. Beck, and M.G. Raymer, Phys. Rev. A, Vol.38, No.2, 820 (1988).
- [Mal76] | **Distribution of neodymium laser energy between modes.** V.I. Malyshev, A.V. Masalov, and A.I. Milanich. Sov. J. Quantum Electron. , Vol.5, No.9, 1066 (1976).
- [Meh86] | **Spontaneous mode splitting in optically pumped molecular lasers due to the ac Stark effect.** S.C. Mehendale and R.G. Harrison. Phys. Rev. A, Vol.34, No.2, 1613 (1986).

- [Mez92] | **Simple modeling of single-mode inhomogeneously broadened laser dynamics.** B. Meziane and H. Ladjouze. Phys. Rev. A, Vol.45, No.5, 3150 (1992).
- [Mir82a] | **Natural noise and jaggedness of the emission spectrum of a multimode solid-state laser.** V.R. Mironenko and V.I. Yudson. Sov. J. Quantum Electron., Vol.12, No.3, 286 (1982).
- [Mir82b] | **Natural fluctuations in a multimode standing-wave laser.** V.R. Mironenko and V.I. Yudson. Sov. J. Quantum Electron. , Vol.12, No.11, 1452 (1982).
- [Mol87] | **Origin of Chaotic Relaxation Oscillations in an Optically Pumped Molecular Laser.** J.V. Moloney, J.S. Uppal, and R.G. Harrison. Phys. Rev. Lett. , Vol.59, No.25, 2868 (1987).
- [Mol89] | **Regular and chaotic dynamics of optically pumped molecular lasers.** J.V. Moloney, W. Forysiak, J.S. Uppal, and R. G. Harrison. Phys. Rev. A, Vol.39, No.3, 1613 (1989).
- [Moo92] | **Chaotic and Fractal Dynamics.** Francis C. Moon. John Wiley and Sons, 1992.
- [Nar86] | **Mode-mode competition and unstable behavior in a homogeneously broadened ring laser.** L.M. Narducci, J.R. Tredicce, L.A. Lugiato, N.B. Abraham, and D.K. Bandy. Phys. Rev. A, Vol.33, No.3, 1842 (1986).
- [Nin90] | **Detuned lasers and the Lorenz complex equations: Subcritical and supercritical Hopf bifurcations.** Cun-Zheng Ning and Hermann Haken. Phys. Rev. A, Vol.41, No.7, 3826 (1990).
- [Nin92 a] | **Geometrical phase and amplitude accumulation in dissipative systems with cyclic attractors.** C-Z. Ning and Hermann Haken. Phys. Rev. Lett. Vol. 68, 2109 (1992).
- [Nin92 b] | **An invariance property of the geometrical phase and its consequence in detuned lasers.** C.Z. Ning and H. Haken. Z. Phys. B-Condensed Matter, Vol.89, 261-262 (1992).
- [Oga87] | **Numerical Analysis of Multi-Mode Laser with Modulated Inversion.** T. Ogawa, and E. Hanamura. Appl. Phys. B 43, pp. 139-153 (1987).
- [Oga88] | **Quaiperiodic instability and chaos in the bad-cavity laser with modulated inversion: Numerical analysis of a Toda oscillator system.** Tetsuo Ogawa. Phys. Rev. A , Vol. 37, No. 11, 4286 (1988).
- [Ots90] | **Self-induced Phase Turbulence and Chaotic Itineracy in Coupled Lasers Systems.** Kenju Otsuka. Phys. Rev. Lett. , Vol65, No.3, 329 (1990).
- [Ots92] | **Dynamical spatial-pattern memory in globally coupled lasers.** Kenju Otsuka and Jyh-Long Chern. Phys. Rev. A, Vol.45, No.11, 8288 (1992).
- [Pas90] | **Fast Local Intensity Fluctuations in a Pulsed Untuned Dye Laser.** I. Pastor and J.M. Guerra. Applied Physics B, Vol.51, 342-349 (1990).

- [Pas91] | ***Spatiotemporal Instabilities from a Transversely Excited Atmospheric CO<sub>2</sub> laser.*** I. Pastor, F. Encinas, and J.M. Guerra. Applied Physics B, Vol.52, 184-190 (1991).
- [Pas93a] | ***Nonlinear plane wave solutions in the semiclassical Maxwell-Bloch laser equations.*** I. Pastor, V.M. Pérez García, F. Encinas Sanz, J.M. Guerra and L. Vázquez. Physica D 66, 412-426 (1993).
- [Pas93b] | ***Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators.*** I. Pastor, Víctor M. Pérez-García, F. Encinas-Sanz and J.M. Guerra. Phys. Rev. E, Vol. 48, No. 1, 171 (1993).
- [Pas93c] | ***Different routes to chaos along a common bifurcation path for field and energy in the semiclassical Maxwell-Bloch equations.*** I. Pastor, V.M. Pérez García, F. Encinas Sanz, and J.M. Guerra. Actas del cuarto congreso europeo de electrónica cuántica, Florencia (1993).
- [Per91] | ***Differential Equations and Dynamical Systems.*** Lawrence Perko. Texts in Applied Mathematics 7. Springer-Verlag 1991.
- [Poi1892] | ***Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste.*** H. Poincaré. Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires, Paris 1892. Nouvelle édition Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris 1987.
- [Pol83] | ***Influence of the structure of a gain profile on the lasing dynamics of a solid-state ring laser.*** N.I. Polushkin, P.A. Khandokhin, and Ya.I. Khanin. Sov. J. Quantum Electron. , Vol.13, No.7, 950 (1983).
- [Pri93a] | ***El nacimiento del tiempo.*** Ilya Prigogine. Ed. Tusquets (segunda edición) 1993.
- [Pri93b] | ***¿Tan sólo una ilusión? Una exploración del caos al orden.*** Ilya Prigogine. Ed. Tusquets (tercera edición) 1993.
- [Puc85] | ***Measurement of the Formation and Evolution of a Strange Attractor in a Laser.*** G.P. Puccioni, A. Poggi, W. Gadowski, J.R. Tredicce, and F.T. Arecchi. Phys. Rev. Lett. , Vol.55, No.4, 339 (1985).
- [Rei88] | ***Optical turbulence in phase-conjugated resonators.*** G. Reiner, M.R. Belic, and P. Meystre. J. Opt. Soc. Am. B, Vol.5, No.5, 1193 (1988).
- [Rol93] | ***Single-mode-lase phase dynamics.*** Eugenio Roldán, G. J. de Valcárcel, R. Vilaseca and Paul Mandel. Phys. Rev. A, Vol. 48, No. 1, 591 (1993).
- [Rue71] | ***On the nature of turbulence.*** D. Ruelle and F. Takens. Comm. Math. Phys. 20 pp. 167-192 (1971).
- [Rue88] | ***Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory.*** David Ruelle. Academic Press, New York 1988.
- [Rue91] | ***Hasard et chaos.*** David Ruelle. Editions Odile Jacob, Paris 1991.

- [Sag88] | ***Nonlinear Physics. From the Pendulum to Turbulence and Chaos.*** R.Z. Sagdeev, D.A. Usikov, and G.M. Zaslavsky. Harwood academic publishers 1988.
- [Sas87] | ***Self Pulsing Properties of Optically Pumped FIR NH<sub>3</sub> Lasers.*** M.P. Sassi, N. Barbeau, and C.O. Weiss. Appl. Phys. B, Vol.43, 179-182 (1987).
- [Shi85] | ***Modeling laser instabilities and chaos.*** Mei-Li Shih, P.W. Miloni and J.R. Ackerhalt. J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 2, No. 1, 130 (1985).
- [Ste91] | ***¿Juega Dios a los dados?*** Ian Stewart. Drakontos, editorial Critica, Barcelona 1991.
- [Sto85] | ***Time evolution of a broadband quasi-cw dye laser: limitations of sensitivity in intracavity laser spectroscopy.*** F. Stoeckel and George H. Atkinson. Applied Optics, Vol.24, No.21, 3591 (1985).
- [Tan91] | ***Field dynamics of a single-mode laser.*** D. Y. Tang and C.O. Weiss. Phys. Rev. A, Vol.44, No.11, 7597 (1991).
- [Tan92] | ***Phase Dynamics of a Detuned Single-Mode Laser.*** D.Y. Tang and C.O. Weiss. Appl. Phys. B, Vol.55, 194-108 (1992).
- [Tar86] | ***Periodic and chaotic output pulsations in a single-mode inhomogeneously broadened laser.*** M.F.H. Tarroja, N.B. Abraham, D.K. Bandy, and L.M. Narducci. Phys. Rev. A, Vol.34, No.4, 3148 (1986).
- [Tre89] | ***Spatial and Temporal Instabilities in a CO<sub>2</sub> laser.*** J.R. Tredicce, E.J. Quel, A.M. Ghazzawi, C. Green, M.A. Pernigo, L.M. Narducci, and L.A. Lugliato. Phys. Rev. Lett. , Vol.62, No.11, 1274 (1989).
- [Vil90] | ***Physical interpretation of laser phase dynamics.*** R. Vilaseca, G.J. de Valcárcel, and E. Roldán. Phys. Rev. A, Vol.41, No.9, 5269 (1990).
- [Vil92] | ***Lorenz Chaos in Optically Pumped Lasers.*** R. Vilaseca and R. Corbalán. Europhys. News, Vol. 23, 27 (1992).
- [Wei83] | ***Routes to chaotic emission in a cw He-Ne laser.*** Phys. Rev. A, Vol.28, No.2, 892 (1983).
- [Wei84a] | ***Self-pulsing instability of a CH<sub>2</sub>F<sub>2</sub>-laser.*** C.O. Weiss and W. Klische. Optics Communications, Vol.50, No.6, 413 (1984).
- [Wei84b] | ***On observability of Lorenz instabilities in lasers.*** C.O. Weiss and W. Klische. Optics Communications, Vol.51, No.1, 47 (1984).
- [Wei85] | ***Observation of instabilities and chaos in optically pumped far-infrared lasers.*** C.O. Weiss. J. Opt. Soc. Am. B, Vol.2, 137 (1985).
- [Wei88a] | ***Chaotic laser dynamics.*** C.O. Weiss. Optical and Quantum Electronics 20, 1-22 (1988).
- [Wei88b] | ***Homoclinic and Heteroclinic Chaos in a Single-Mode Laser.*** C.O. Weiss, N.B. Abraham, and U. Hübner. Phys. Rev. Lett. , Vol.61, No.14, 1587 (1988).

- [Wei89 ] ***Comparison of NH<sub>3</sub> Laser Dynamics with the Extended Lorenz Model***. C.O. Weiss, W. Klische, N.B. Abraham, and U. Hübner. Appl. Phys. B, Vol.49, 211-215 (1989).
- [Wei92 ] ***Spatio-temporal structures. Part II. Vortices and defects in lasers***. C.O. Weiss. Physics Reports 219, Nos.3-6, 311-338 (1992).
- [Wes84 ] ***Single-shot spectral measurements and mode correlation in a multimode pulsed dye laser***. L.A. Westling, M.G. Raymer, and J.J. Snyder. J. Opt. Soc. Am. B, Vol.1, No.2, 150 (1984).
- [Zeg88 ] ***Phase and amplitude dynamics in the laser Lorenz model***. H. Zeghlache and Paul Mandel. Phys. Rev. A, Vol.38, No.6, 3128 (1988).